# 14

# INTEGRACIÓN

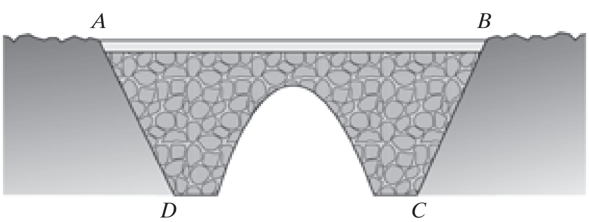


**Aplicación práctica** Cargos de envío

Cualquier persona que haya tenido un negocio, conoce la necesidad de estimar costos con precisión. Cuando los trabajos se contratan de manera individual, la determinación de cuánto cuesta el trabajo, por lo general es el primer paso para decidir cuánto pedir.

Por ejemplo, un pintor debe determinar cuánta pintura utilizará en un trabajo. Como un galón de pintura cubrirá cierto número de pies cuadrados, la clave es determinar el área de la superficie que será pintada. Por lo general, esto sólo requiere de aritmética simple, —las paredes y los techos son rectangulares, por lo que el área total es una suma de productos de base por altura.

Pero no todas las áreas son tan sencillas de calcular. Por ejemplo, suponga que el puente que se muestra a continuación debe pulirse con un chorro de arena para retirar el hollín acumulado. ¿Cómo calcularía el contratista el número de pies cuadrados del área de la pared vertical de cada lado del puente?




Quizá el área podría estimarse como tres cuartos del área del trapezoide formado por los puntos $A$, $B$, $C$ y $D$. Pero un cálculo más preciso —que podría ser más adecuado si la cotización fuese para una docena de puentes del mismo tamaño (por ejemplo, a lo largo de una vía de tren)— requeriría de un enfoque más refinado.

Si la forma del arco del puente pudiera describirse en forma matemática por medio de una función, el contratista podría utilizar el método que se presenta en este capítulo: integración. La integración tiene muchas aplicaciones, la más simple es la determinación de áreas de regiones acotadas por curvas. Otras incluyen el cálculo de la deflexión total de una viga debido a una fuerza de flexión, el cálculo de la distancia que recorre un submarino bajo el mar, y el cálculo del pago de electricidad de una compañía que consume energía a diferentes tasas en el transcurso de un mes. Los capítulos 11 a 13 trataron el cálculo diferencial. Se diferenció una función y se obtuvo otra función que es su derivada. El *cálculo integral* se ocupa del proceso inverso: dada la derivada de una función se debe encontrar la función original. La necesidad de hacerlo surge de manera natural. Por ejemplo, se puede tener una función de ingreso marginal y querer encontrar la función de ingreso a partir de ella. El cálculo integral también involucra un concepto de límite, que permite determinar el límite de un tipo especial de suma cuando el número de términos en ella tiende a infinito. ¡Ésta es la verdadera fuerza del cálculo integral! Con esta noción, es posible calcular el área de una región que no pueda encontrarse mediante ningún otro método conveniente.

## 14.1 Diferenciales

**OBJETIVO**

Definir la diferencial, interpretarla de manera geométrica y usarla en aproximaciones. Asimismo, establecer nuevamente las relaciones de reciprocidad entre $dx/dy$ y $dy/dx$.

Pronto se dará una razón para usar el símbolo $dy/dx$ para denotar la derivada de $y$ con respecto a $x$. Para ello, se introducirá la noción de la *diferencial* de una función.

**DEFINICIÓN**

Sea $y = f(x)$ una función diferenciable de $x$, y sea $\Delta x$ un cambio en $x$, donde $\Delta x$ puede ser cualquier número real. Entonces, la ***diferencial*** de $y$, que se denota por $dy$ o $d(f(x))$, está dada por

$$dy = f'(x)\Delta x$$

Note que $dy$ depende de dos variables, a saber, $x$ y $\Delta x$. De hecho, $dy$ es una función de dos variables.

### EJEMPLO 1 Cálculo de una diferencial

*Encuentre la diferencial de* $y = x^3 - 2x^2 + 3x - 4$ *y evalúela cuando* $x = 1$ *y* $\Delta x = 0.04$.

**Solución:** La diferencial es

$$dy = \frac{d}{dx}(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)\,\Delta x$$
$$= (3x^2 - 4x + 3)\,\Delta x$$

Cuando $x = 1$ y $\Delta x = 0.04$,

$$dy = [3(1)^2 - 4(1) + 3](0.04) = 0.08$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

Si $y = x$, entonces $dy = d(x) = 1\Delta x = \Delta x$. Por lo tanto, la diferencial de $x$ es $\Delta x$. Se abrevia $d(x)$ con $dx$. Así, $dx = \Delta x$. De ahora en adelante en este texto siempre se escribirá $dx$ en vez de $\Delta x$ cuando se busque una diferencial. Por ejemplo,

$$d(x^2 + 5) = \frac{d}{dx}(x^2 + 5)\,dx = 2x\,dx$$

En resumen, se dice que si $y = f(x)$ define una función diferenciable de $x$, entonces

$$dy = f'(x)dx$$

donde $dx$ es cualquier número real. Siempre y cuando $dx \neq 0$, es posible dividir ambos lados de la ecuación entre $dx$:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Esto es, $dy/dx$ puede interpretarse como el cociente de dos diferenciales, a saber, $dy$ dividido entre $dx$, o como un símbolo para la derivada de $f$ en $x$. Es por esto que se introdujo el símbolo $dy/dx$ para denotar la derivada.

### EJEMPLO 2 Determinación de una diferencial en términos de *dx*

**a.** Si $f(x) = \sqrt{x}$, entonces

$$d(\sqrt{x}) = \frac{d}{dx}(\sqrt{x})\,dx = \frac{1}{2}x^{-1/2}dx = \frac{1}{2\sqrt{x}}dx$$

**b.** Si $u = (x^2 + 3)^5$, entonces $du = 5(x^2 + 3)^4(2x)dx = 10x(x^2 + 3)^4dx$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

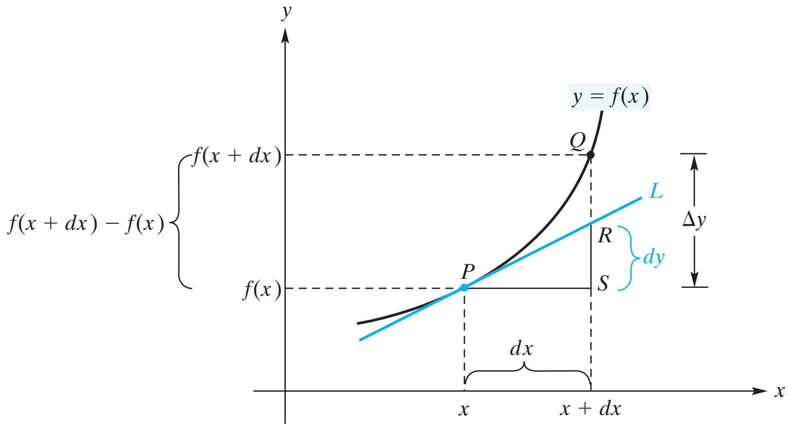



**FIGURA 14.1** Interpretación geométrica de $dy$ y $\Delta x$.

La diferencial puede interpretarse de manera geométrica. En la figura 14.1, el punto $P(x, f(x))$ está sobre la curva $y = f(x)$. Suponga que $x$ cambia en $dx$, un número real, al nuevo valor $x + dx$. Entonces, el valor de la nueva función es $f(x + dx)$, y el punto correspondiente sobre la curva es $Q(x + dx, f(x + dx))$. Por $P$ y $Q$ pasan líneas horizontales y verticales, respectivamente, que se intersecan en $S$. Una línea $L$ tangente a la curva de $P$ interseca el segmento $QS$ en $R$, y forma el triángulo rectángulo $PRS$. Observe que la gráfica de $f$ cerca de $P$ es aproximada por la línea tangente en $P$. La pendiente de $L$ es $f'(x)$ pero también está dada por $\overline{SR}/\overline{PS}$, de manera que

$$f'(x) = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}}$$

Como $dy = f'(x)dx$ y $dx = \overline{PS}$.

$$dy = f'(x)\,dx = \frac{\overline{SR}}{\overline{PS}} \cdot \overline{PS} = \overline{SR}$$

Así, si $dx$ es un cambio de $x$ en $P$, entonces $dy$ es el cambio vertical correspondiente a lo largo de la **línea tangente** en $P$. Observe que para la misma $dx$, el cambio vertical a lo largo de la curva es $\Delta y = \overline{SQ} = f(x + dx) - f(x)$. No confunda $\Delta y$ con $dy$. Sin embargo, en la figura 14.1 es claro que:

Cuando $dx$ es cercana a 0, $dy$ es una aproximación a $\Delta y$. Por lo tanto,

$$\Delta y \approx dy$$

Esta relación es útil al estimar $\Delta y$, un cambio en $y$, como se verá en el ejemplo 3.

## EJEMPLO 3 Uso de la diferencial para estimar un cambio en una cantidad

*Un centro de salud del gobierno examinó las historias clínicas de un grupo de individuos que fueron hospitalizados por una enfermedad particular. Se encontró que la proporción total P que fue dada de alta al final de t días está dada por*

$$P = P(t) = 1 - \left(\frac{300}{300 + t}\right)^3$$

*Use diferenciales para estimar el cambio en la proporción dada de alta si t cambia de* 300 *a* 305.

**Solución:** El cambio en $t$ de 300 a 305 es $\Delta t = dt = 305 - 300 = 5$. El cambio en $P$ es $\Delta P = P(305) - P(300)$. Se aproxima $\Delta P$ mediante $dP$:

$$\Delta P \approx dP = P'(t)\,dt = -3\left(\frac{300}{300 + t}\right)^2\left(-\frac{300}{(300 + t)^2}\right)dt = 3\frac{300^3}{(300 + t)^4}\,dt$$

Cuando $t = 300$ y $dt = 5$,

$$dP = 3\frac{300^3}{600^4}5 = \frac{15}{2^3 600} = \frac{1}{2^3 40} = \frac{1}{320} \approx 0.0031$$

Como comparación, el valor verdadero de $\Delta P$ es

$$P(305) - P(300) = 0.87807 - 0.87500 = 0.00307$$

(con cinco decimales).

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

Se dijo que si $y = f(x)$, entonces $\Delta y \approx dy$ si $dx$ es cercana a cero. Así,

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x) \approx dy$$

La fórmula (1) se usa para aproximar una función, mientras que la fórmula $\Delta y \approx dy$ se usa para aproximar un cambio en los valores de la función.

de manera que

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy \qquad \textbf{(1)}$$

Esta fórmula proporciona una forma de estimar el valor de una función $f(x + dx)$. Por ejemplo, suponga que se quiere estimar ln(1.06). Si se establece que $y = f(x) = \ln x$, se necesita estimar $f(1.06)$. Como $d(\ln x) = (1/x)dx$, de la fórmula (1) se tiene,

$$f(x + dx) \approx f(x) + dy$$
$$\ln(x + dx) \approx \ln x + \frac{1}{x}\,dx$$

Se conoce el valor exacto de ln 1, por lo que se establece que $x = 1$ y $dx = 0.06$. Entonces, $x + dx = 1.06$ y $dx$ es cercana a cero. Por lo tanto,

$$\ln(1 + 0.06) \approx \ln(1) + \frac{1}{1}(0.06)$$
$$\ln(1.06) \approx 0 + 0.06 = 0.06$$

El valor verdadero de ln(1.06) con cinco decimales es 0.05827.

## EJEMPLO 4 Uso de la diferencial para estimar el valor de una función

*La función de demanda para un producto está dada por*

$$p = f(q) = 20 - \sqrt{q}$$

*donde p es el precio por unidad en dólares para q unidades. Por medio de diferenciales, estime el precio cuando se demandan 99 unidades.*

**Solución:** Se desea estimar $f(99)$. Por medio de la fórmula (1),

$$f(q + dq) \approx f(q) + dp$$

donde

$$dp = -\frac{1}{2\sqrt{q}}\,dq \qquad \left(\frac{dp}{dq} = -\frac{1}{2}q^{-1/2}\right)$$

Se escoge $q = 100$ y $dq = -1$ porque $q + dq = 99$, $dq$ es pequeña y es fácil calcular $f(100) = 20 - \sqrt{100} = 10$. Así se tiene

$$f(99) = f[100 + (-1)] \approx f(100) - \frac{1}{2\sqrt{100}}(-1)$$
$$f(99) \approx 10 + 0.05 = 10.05$$

De aquí que el precio por unidad cuando se demandan 99 unidades sea de aproximadamente \$10.05.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

La ecuación $y = x^3 + 4x + 5$ define a $y$ como una función de $x$. Es posible escribir $f(x) = x^3 + 4x + 5$. Sin embargo, también define a $x$ implícitamente como una función de $y$. De hecho, si se restringe el dominio de $f$ a algún conjunto de números reales $x$ de manera que $y = f(x)$ sea una función de uno a uno, entonces en principio es posible despejar $x$ en términos de $y$ y obtener $x = f^{-1}(y)$. (En realidad, aquí no es necesario hacer ninguna restricción al dominio. Como $f'(x)\ 3x^2 + 4 > 0$, para toda $x$, se observa que $f$ es estrictamente creciente sobre $(-\infty, \infty)$ y por lo tanto es uno a uno sobre $(-\infty, \infty)$.) Como se hizo en el ejemplo 6 de la sección 12.2 se puede considerar la derivada de $x$ con respecto a $y$, $dx/dy$, y se observa que está dada por

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}} \quad \text{siempre que } dy/dx \neq 0$$

Como $dx/dy$ puede considerarse un cociente de diferenciales, ahora se ve que es el recíproco del cociente de diferenciales $dy/dx$. Así

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$$

Es importante entender que no es necesario poder despejar $x$ de $y = x^3 + 4x + 5$ en términos de $y$ y la ecuación $\frac{dx}{dy} = \frac{1}{3x^2 + 4}$ es válida para toda $x$.

## EJEMPLO 5 Determinación de $dp/dq$ a partir de $dq/dp$

*Encuentre* $\frac{dp}{dq}$ *si* $q = \sqrt{2500 - p^2}$.

**Solución:**

**Estrategia** Hay varias maneras de encontrar $dp/dq$. Una es despejar $p$ de la ecuación dada en términos de $q$ y luego diferenciar en forma directa. Otro método consiste en usar la diferenciación implícita. Sin embargo, como $q$ está dada explícitamente como función de $p$, se puede encontrar fácilmente $dq/dp$ y luego usar la relación recíproca anterior para encontrar $dp/dq$. Se usará este último procedimiento.

Se tiene

$$\frac{dq}{dp} = \frac{1}{2}(2500 - p^2)^{-1/2}(-2p) = -\frac{p}{\sqrt{2500 - p^2}}$$

Por lo tanto,

$$\frac{dp}{dq} = \frac{1}{\frac{dq}{dp}} = -\frac{\sqrt{2500 - p^2}}{p}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

## Problemas 14.1

*En los problemas 1 a 10, encuentre la diferencial de la función en términos de x y dx.*

*1. $y = 5x - 7$

2. $y = 2$

*3. $f(x) = \sqrt{x^4 - 9}$

4. $f(x) = (4x^2 - 5x + 2)^3$

5. $u = \frac{1}{x^2}$

6. $u = \frac{1}{\sqrt{x}}$

7. $p = \ln(x^2 + 7)$

8. $p = e^{x^3 + 2x - 5}$

9. $y = (9x + 3)e^{2x^2 + 3}$

10. $y = \ln\sqrt{x^2 + 12}$

*En los problemas 11 a 16, encuentre Δy y dy para los valores dados de x y dx.*

*11. $y = 4 - 7x$; $x = 3$, $dx = 0.02$

12. $y = 5x^2$; $x = -1$, $dx = -0.02$

13. $y = 2x^2 + 5x - 7$; $x = -2$, $dx = 0.1$

14. $y = (3x + 2)^2$; $x = -1$, $dx = -0.03$

15. $y = \sqrt{32 - x^2}$; $x = 4$, $dx = -0.05$. Redondee su respuesta a tres decimales.

16. $y = \ln(-x)$; $x = -5$, $dx = 0.1$.

*17. Sea $f(x) = \frac{x + 5}{x + 1}$

**(a)** Evalúe $f'(1)$.

**(b)** Use diferenciales para estimar el valor de $f(1.1)$.

18. Sea $f(x) = x^{3x}$

**(a)** Evalúe $f'(1)$.

**(b)** Use diferenciales para estimar el valor de $f(0.98)$.

*En los problemas 19 a 26, aproxime cada expresión por medio de diferenciales.*

**19.** $\sqrt{288}$ (*Una pista:* $17^2 = 289$.) **20.** $\sqrt{122}$

**21.** $\sqrt[3]{65.5}$ **22.** $\sqrt[4]{16.3}$

**23.** $\ln 0.97$ **24.** $\ln 1.01$

**25.** $e^{0.001}$ **26.** $e^{-0.01}$

*En los problemas del 27 al 32, encuentre $dx/dy$ o $dp/dq$.*

***27.** $y = 2x - 1$ **28.** $y = 5x^2 + 3x + 2$

**29.** $q = (p^2 + 5)^3$ **30.** $q = \sqrt{p+5}$

**31.** $q = \dfrac{1}{p}$ **32.** $q = e^{4-2p}$

**33.** Si $y = 7x^2 - 6x + 3$, encuentre el valor de $dx/dy$ cuando $x = 3$.

**34.** Si $y = \ln x^2$, encuentre el valor de $dx/dy$ cuando $x = 3$.

*En los problemas 35 a 36, encuentre la razón de cambio de q con respecto a p para el valor indicado de q.*

**35.** $p = \dfrac{500}{q+2}$; $q = 18$ **36.** $p = 50 - \sqrt{q}$; $q = 100$

**37. Utilidad** Suponga que la utilidad (en dólares) al producir $q$ unidades de un producto es

$$P = 397q - 2.3q^2 - 400$$

Por medio de diferenciales, encuentre el cambio aproximado en la utilidad, si el nivel de producción cambia de $q = 90$ a $q = 91$. Encuentre el cambio verdadero.

**38. Ingreso** Dada la función de ingreso

$$r = 250q + 45q^2 - q^3$$

use diferenciales para encontrar el cambio aproximado en el ingreso, si el número de unidades se incrementa de $q = 40$ a $q = 41$. Encuentre el cambio verdadero.

**39. Demanda** La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{10}{\sqrt{q}}$$

Por medio de diferenciales estime el precio cuando se demandan 24 unidades.

**40. Demanda** Dada la función de demanda

$$p = \frac{200}{\sqrt{q+8}}$$

use diferenciales para estimar el precio por unidad cuando se demandan 40 unidades.

**41.** Si $y = f(x)$, entonces el *cambio proporcional* en $y$ se define como $\Delta y/y$, que puede aproximarse con diferenciales por medio de $dy/y$. Use esta última forma para estimar el cambio proporcional en la función de costo

$$c = f(q) = \frac{q^4}{2} + 3q + 400$$

donde $q = 10$ y $dq = 2$. Redondee su respuesta a un decimal.

**42. Estatus/ingreso** Suponga que $S$ es un valor numérico de la condición social basado en el ingreso anual, $I$ (en miles de dólares), de una persona. Para cierta población, suponga que $S = 20\sqrt{I}$. Use diferenciales para estimar el cambio en $S$, si el ingreso anual decrece de \$45 000 a \$44 500.

**43. Biología** El volumen de una célula esférica está dado por $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, donde $r$ es el radio. Estime el cambio en el volumen cuando el radio cambia de $6.5 \times 10^{-4}$ cm a $6.6 \times 10^{-4}$ cm.

**44. Contracción muscular** La ecuación

$$(P + a)(v + b) = k$$

se llama "ecuación fundamental de la contracción muscular".[1] Aquí, $P$ es la carga impuesta al músculo, $v$ la velocidad de contracción de las fibras del músculo y $a$, $b$ y $k$ son constantes positivas. Encuentre $P$ en términos de $v$ y luego use diferenciales para estimar el cambio en $P$ debido a un pequeño cambio en $v$.

**45. Demanda** La demanda, $q$, para el producto de un monopolista está relacionada con el precio por unidad, $p$, según la ecuación

$$2 + \frac{q^2}{200} = \frac{4000}{p^2}$$

**(a)** Verifique que se demandarán 40 unidades cuando el precio por unidad sea de \$20.

**(b)** Demuestre que $\dfrac{dq}{dp} = -2.5$ cuando el precio por unidad es de \$20.

**(c)** Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (b) para estimar el número de unidades que se demandarán si el precio por unidad se reduce a \$19.20.

**46. Utilidad** La ecuación de demanda para el producto de un monopolista es

$$p = \frac{1}{2}q^2 - 66q + 7000$$

y la función de costo promedio es

$$\bar{c} = 500 - q + \frac{80\,000}{2q}$$

**(a)** Encuentre la utilidad cuando se demandan 100 unidades.

**(b)** Use diferenciales y el resultado del inciso (a) para estimar la utilidad cuando se demandan 98 unidades.

**OBJETIVO**

Definir la antiderivada y la integral indefinida, y aplicar fórmulas básicas de integración.

## 14.2 La integral indefinida

Dada una función $f$, si $F$ es una función tal que

$$F'(x) = f(x) \tag{1}$$

entonces $F$ se llama *antiderivada* de $f$. Así,

Una antiderivada de $f$ es simplemente una función cuya derivada es $f$.

[1] R. W. Stacy *et al., Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

Al multiplicar ambos lados de la ecuación (1) por la diferencial $dx$ resulta $F'(x)\,dx = f(x)\,dx$. Sin embargo, como $F'(x)\,dx$ es la diferencial de $F$, se tiene que $dF = f(x)\,dx$. De aquí que se pueda considerar una antiderivada de $f$ como una función cuya diferencial es $f(x)\,dx$.

**DEFINICIÓN**

Una ***antiderivada*** de una función $f$ es una función $F$ tal que

$$F'(x) = f(x)$$

De manera equivalente, en notación diferencial

$$dF = f(x)\,dx$$

Por ejemplo, como la derivada de $x^2$ es $2x$, $x^2$ es una antiderivada de $2x$. Sin embargo, no es la única antiderivada de $2x$: ya que

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 1) = 2x \quad \text{y} \quad \frac{d}{dx}(x^2 - 5) = 2x$$

tanto $x^2 + 1$ como $x^2 - 5$ también son antiderivadas de $2x$. De hecho, es claro que como la derivada de una constante es cero, $x^2 + C$ es también una antiderivada de $2x$ para *cualquier* constante $C$. Así, $2x$ tiene un número infinito de antiderivadas. Lo más importante, es que *todas* las antiderivadas de $2x$ deben ser funciones de la forma $x^2 + C$, debido al siguiente hecho:

Dos antiderivadas cualesquiera de una función difieren sólo en una constante.

Como $x^2 + C$ describe todas las antiderivadas de $2x$, se puede hacer referencia a ella como la *antiderivada más general* de $2x$, denotada por $\int 2x dx$, que se lee "*integral indefinida* de $2x$ con respecto a $x$". Así, se escribe

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

El símbolo $\int$ se llama **símbolo de integración**, $2x$ es el **integrando** y $C$ la **constante de integración**. La $dx$ es parte de la notación integral e indica la variable implicada. Aquí, $x$ es la **variable de integración**.

En forma más general, la **integral indefinida** de cualquier función $f$ con respecto a $x$ se escribe $\int f(x)\,dx$ y denota la antiderivada más general de $f$. Como todas las antiderivadas de $f$ difieren sólo en una constante, si $F$ es cualquier antiderivada de $f$, entonces

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{donde } C \text{ es una constante}$$

*Integrar* $f$ significa encontrar $\int f(x)dx$. En resumen,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C \quad \text{si y sólo si} \quad F'(x) = f(x)$$

Así, se tiene

$$\frac{d}{dx}\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x) \quad \text{y} \quad \int \frac{d}{dx}(F(x))\,dx = F(x) + C$$

con lo que se muestra la extensión a la cual la diferenciación y la integración indefinida son procedimientos inversos.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**DETERMINACIÓN DE UNA INTEGRAL INDEFINIDA**

Si el costo marginal para una compañía es $f(q) = 28.3$, encuentre $\int 28.3\, dq$, que proporciona la forma de la función de costo.

**ADVERTENCIA**

Un error común consiste en omitir $C$, la constante de integración.

## EJEMPLO 1 Determinación de una integral indefinida

*Encuentre* $\int 5\, dx$.

**Solución:**

**Estrategia** Primero se debe encontrar (tal vez una palabra más apropiada sería "inferir") una función cuya derivada sea 5. Luego se añadirá la constante de integración.

Como se sabe que la derivada de $5x$ es 5, $5x$ es una antiderivada de 5. Por lo tanto,

$$\int 5\, dx = 5x + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**TABLA 14.1** Fórmulas básicas de integración

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $\int k\, dx = kx + C$ | $k$ es una constante |
| 2. | $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ | $n \neq -1$ |
| 3. | $\int x^{-1}\, dx = \int \frac{1}{x} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x + C$ | para $x > 0$ |
| 4. | $\int e^x\, dx = e^x + C$ | |
| 5. | $\int kf(x)\, dx = k \int f(x)\, dx$ | $k$ es una constante |
| 6. | $\int (f(x) \pm g(x))\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$ | |

Mediante las fórmulas de diferenciación de los capítulos 11 y 12, se ha elaborado una lista de fórmulas básicas de integración en la tabla 14.1. Todas son fáciles de verificar. Por ejemplo, la fórmula 2 es cierta porque la derivada de $x^{n+1}/(n+1)$ es $x^n$ para $n \neq -1$. (Se debe tener $n \neq -1$ porque el denominador es 0 cuando $n = -1$). La fórmula 2 establece que la integral indefinida de una potencia de $x$ (excepto $x^{-1}$) se obtiene al incrementar el exponente de $x$ en 1, al dividir esto entre el nuevo exponente y al sumarle la constante de integración. En la sección 14.4 se analizará la integral indefinida de $x^{-1.}$

Para verificar la fórmula 5, se debe comprobar que la derivada de $k \int f(x)\, dx$ es $kf(x)$. Como la derivada de $k\int f(x)\, dx$ es simplemente $k$ veces la derivada de $\int f(x)\, dx$, que es $f(x)$, la fórmula 5 queda comprobada. El lector debe verificar las otras fórmulas. La fórmula 6 puede extenderse a cualquier número de sumas o diferencias.

## EJEMPLO 2 Integrales indefinidas de una constante y de una potencia de $x$

**a.** *Encuentre* $\int 1\, dx$.

**Solución:** Por la fórmula 1 con $k = 1$

$$\int 1\, dx = 1x + C = x + C$$

Usualmente se escribe $\int 1\, dx$ como $\int dx$. Por lo que, $\int dx = x + C$.

**b.** *Encuentre* $\int x^5\,dx$.

**Solución:** Por la fórmula 2 con $n = 5$,

$$\int x^5\,dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN**

Si la razón de cambio de los ingresos de una compañía puede modelarse mediante $\frac{dR}{dt} = 0.12t^2$, entonces encuentre $\int 0.12t^2\,dt$, que proporciona la función de ingresos de la compañía.

## EJEMPLO 3 Integral indefinida de una constante por una función

*Encuentre* $\int 7x\,dx$.

**Solución:** Por la fórmula 5 con $k = 7$ y $f(x) = x$,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx$$

Como $x$ es $x^1$, por la fórmula 2 se tiene

$$\int x^1\,dx = \frac{x^{1+1}}{1+1} + C_1 = \frac{x^2}{2} + C_1$$

donde $C_1$ es la constante de integración. Por lo tanto,

$$\int 7x\,dx = 7\int x\,dx = 7\left(\frac{x^2}{2} + C_1\right) = \frac{7}{2}x^2 + 7C_1$$

**ADVERTENCIA**

Sólo un factor *constante* del integrando puede "salir" del signo de integral. Como $x$ no es una constante, no es posible encontrar $\int 7x\,dx$ como $7x$ por $\int dx$.

Como $7C_1$ sólo es una constante arbitraria, para hacerlo más simple se reemplazará por $C$. Así,

$$\int 7x\,dx = \frac{7}{2}x^2 + C$$

No es necesario escribir todos los pasos intermedios al integrar. De manera más sencilla, se escribe

$$\int 7x\,dx = (7)\frac{x^2}{2} + C = \frac{7}{2}x^2 + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

## EJEMPLO 4 Integral indefinida de una constante por una función

*Encuentre* $\int -\frac{3}{5}e^x\,dx$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int -\frac{3}{5}e^x\,dx &= -\frac{3}{5}\int e^x\,dx && \text{(Fórmula 5)}\\ &= -\frac{3}{5}e^x + C && \text{(Fórmula 4)}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 21

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 3**

**DETERMINACIÓN DE INTEGRALES INDEFINIDAS**

Debido a un nuevo competidor, el número de suscriptores a cierta revista disminuye a una tasa de $\frac{dS}{dt} = -\frac{480}{t^3}$ suscripciones por mes, donde $t$ es el número de meses desde que la competencia entró al mercado. Encuentre la forma de la ecuación para el número de suscriptores a la revista.

## EJEMPLO 5 Determinación de integrales indefinidas

**a.** *Encuentre* $\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt$.

**Solución:** Aquí, $t$ es la variable de integración. Se escribe de nuevo el integrando de manera que se pueda usar una fórmula básica. Como $1/\sqrt{t} = t^{-1/2}$, al aplicar la fórmula 2 se obtiene

$$\int \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt = \int t^{-1/2}\,dt = \frac{t^{(-1/2)+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{t^{1/2}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{t} + C$$

**b.** *Encuentre* $\int \frac{1}{6x^3}\,dx$

**Solución:**

$$\int \frac{1}{6x^3}\,dx = \frac{1}{6}\int x^{-3}\,dx = \left(\frac{1}{6}\right)\frac{x^{-3+1}}{-3+1} + C$$
$$= -\frac{x^{-2}}{12} + C = -\frac{1}{12x^2} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 4**

**INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA SUMA**

La tasa de crecimiento de la población de una nueva ciudad se estima mediante $\frac{dN}{dt} = 500 + 300\sqrt{t}$, donde $t$ está en años. Encuentre

$$\int (500 + 300\sqrt{t})\,dt$$

## EJEMPLO 6 Integral indefinida de una suma

*Encuentre* $\int (x^2 + 2x)\,dx$.

**Solución:** Por la fórmula 6,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \int x^2\,dx + \int 2x\,dx$$

Ahora,

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C_1 = \frac{x^3}{3} + C_1$$

y

$$\int 2x\,dx = 2\int x\,dx = (2)\frac{x^{1+1}}{1+1} + C_2 = x^2 + C_2$$

Por lo que,

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C_1 + C_2$$

Por conveniencia, se reemplazará la constante $C_1 + C_2$ por $C$. Entonces se tiene

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

Cuando la integración de una expresión incluye más de un término, sólo se necesita una constante de integración.

Si se omiten los pasos intermedios, se integra simplemente término por término y se escribe

$$\int (x^2 + 2x)\,dx = \frac{x^3}{3} + (2)\frac{x^2}{2} + C = \frac{x^3}{3} + x^2 + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 5**

**INTEGRAL INDEFINIDA DE UNA SUMA Y UNA DIFERENCIA**

Suponga que la tasa de ahorro en Estados Unidos está dada por $\frac{dS}{dt} = 2.1t^2 - 65.4t + 491.6$, donde $t$ es el tiempo en años y $S$ es la cantidad de dinero ahorrado en miles de millones de dólares. Encuentre la forma de la ecuación para la cantidad de dinero ahorrado.

## EJEMPLO 7 Integral indefinida de una suma y una diferencia

*Encuentre* $\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$.

**Solución:**

$$\int (2\sqrt[5]{x^4} - 7x^3 + 10e^x - 1)\,dx$$
$$= 2\int x^{4/5}\,dx - 7\int x^3\,dx + 10\int e^x\,dx - \int 1\,dx \qquad \text{(Fórmulas 5 y 6)}$$
$$= (2)\frac{x^{9/5}}{\frac{9}{5}} - (7)\frac{x^4}{4} + 10e^x - x + C \qquad \text{(Fórmulas 1, 2 y 4)}$$
$$= \frac{10}{9}x^{9/5} - \frac{7}{4}x^4 + 10e^x - x + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

A veces, para aplicar las fórmulas básicas de integración, es necesario realizar primero operaciones algebraicas en el integrando, como se muestra en el ejemplo 8.

**EJEMPLO 8 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida**

*Encuentre* $\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy$.

**Solución:** El integrando no concuerda con ninguna forma familiar de integración. Sin embargo, después de multiplicar los factores del integrando se obtiene

$$\int y^2\left(y+\frac{2}{3}\right)dy=\int\left(y^3+\frac{2}{3}y^2\right)dy$$
$$=\frac{y^4}{4}+\left(\frac{2}{3}\right)\frac{y^3}{3}+C=\frac{y^4}{4}+\frac{2y^3}{9}+C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41

**ADVERTENCIA**

En el ejemplo 8, primero se multiplican los factores en el integrando. La respuesta no hubiera podido encontrarse simplemente en términos de $\int y^2 dy$ y $\int (y+\frac{2}{3})\,dy$. No existe una fórmula para la integral de un producto general de funciones.

**EJEMPLO 9 Uso de manipulaciones algebraicas para encontrar una integral indefinida**

**a.** *Encuentre* $\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\,dx$.

**Solución:** Al factorizar la constante $\frac{1}{6}$ y multiplicar los binomios, se obtiene

$$\int \frac{(2x-1)(x+3)}{6}\,dx=\frac{1}{6}\int(2x^2+5x-3)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}\left((2)\frac{x^3}{3}+(5)\frac{x^2}{2}-3x\right)+C$$
$$=\frac{x^3}{9}+\frac{5x^2}{12}-\frac{x}{2}+C$$

**b.** *Encuentre* $\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx$.

**Solución:** Es posible descomponer el integrando en fracciones, al dividiir cada término del numerador entre el denominador:

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx=\int\left(\frac{x^3}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)dx=\int(x-x^{-2})\,dx$$
$$=\frac{x^2}{2}-\frac{x^{-1}}{-1}+C=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}+C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 49

Otro enfoque algebraico para el inciso (b) es

$$\int \frac{x^3-1}{x^2}\,dx=\int(x^3-1)x^{-2}\,dx$$
$$=\int(x-x^{-2})\,dx$$

y así sucesivamente.

## Problemas 14.2

*En los problemas 1 a 52, encuentre las integrales indefinidas.*

*1. $\int 7\,dx$

2. $\int \frac{1}{2x}\,dx$

*3. $\int x^8\,dx$

4. $\int 5x^{24}\,dx$

*5. $\int 5x^{-7}\,dx$

6. $\int \frac{z^{-3}}{3}\,dz$

7. $\int \frac{2}{x^{10}}\,dx$

8. $\int \frac{7}{x^4\,dx}$

*9. $\int \frac{1}{t^{7/4}}\,dt$

10. $\int \frac{7}{2x^{9/4}}\,dx$

*11. $\int (4+t)\,dt$

12. $\int (r^3+2r)\,dr$

13. $\int (y^5-5y)\,dy$

14. $\int (5-2w-6w^2)\,dw$

*15. $\int (3t^2-4t+5)\,dt$

16. $\int (1+t^2+t^4+t^6)\,dt$

**17.** $\int (7+e)\,dx$

**18.** $\int (5-2^{-1})\,dx$

**19.** $\int \left(\frac{x}{7}-\frac{3}{4}x^4\right) dx$

**20.** $\int \left(\frac{2x^2}{7}-\frac{8}{3}x^4\right) dx$

***21.** $\int \pi e^x\,dx$

**22.** $\int \left(\frac{e^x}{3}+2x\right) dx$

**23.** $\int (x^{8.3}-9x^6+3x^{-4}+x^{-3})\,dx$

**24.** $\int (0.7y^3+10+2y^{-3})\,dy$

**25.** $\int \frac{-2\sqrt{x}}{3}\,dx$

**26.** $\int dz$

**27.** $\int \frac{1}{4\sqrt[8]{x^2}}\,dx$

**28.** $\int \frac{-4}{(3x)^3}\,dx$

**29.** $\int \left(\frac{x^3}{3}-\frac{3}{x^3}\right) dx$

**30.** $\int \left(\frac{1}{2x^3}-\frac{1}{x^4}\right) dx$

**31.** $\int \left(\frac{3w^2}{2}-\frac{2}{3w^2}\right) dw$

**32.** $\int \frac{4}{e^{-s}}\,ds$

**33.** $\int \frac{3u-4}{5}\,du$

**34.** $\int \frac{1}{12}\left(\frac{1}{3}e^x\right) dx$

**35.** $\int (u^e+e^u)\,du$

**36.** $\int \left(3y^3-2y^2+\frac{e^y}{6}\right) dy$

**37.** $\int (2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x})\,dx$

**38.** $\int 0\,dt$

**39.** $\int \left(-\frac{\sqrt[3]{x^2}}{5}-\frac{7}{2\sqrt{x}}+6x\right) dx$

**40.** $\int \left(\sqrt[3]{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right) du$

***41.** $\int (x^2+5)(x-3)\,dx$

**42.** $\int x^4(x^3+8x^2+7)\,dx$

**43.** $\int \sqrt{x}(x+3)\,dx$

**44.** $\int (z+2)^2\,dz$

**45.** $\int (3u+2)^3\,du$

**46.** $\int \left(\frac{2}{\sqrt[5]{x}}-1\right)^2 dx$

**47.** $\int v^{-2}(2v^4+3v^2-2v^{-3})\,dv$

**48.** $\int (6e^u-u^3(\sqrt{u}+1))\,du$

***49.** $\int \frac{z^4+10z^3}{2z^2}\,dz$

**50.** $\int \frac{x^4-5x^2+2x}{5x^2}\,dx$

**51.** $\int \frac{e^x+e^{2x}}{e^x}\,dx$

**52.** $\int \frac{(x^3+1)^2}{x^2}\,dx$

**53.** Si $F(x)$ y $G(x)$ son tales que $F'(x) = G'(x)$, ¿es cierto que $F(x) - G(x)$ debe ser cero?

**54.** **(a)** Encuentre una función $F$ tal que $\int F(x)dx = xe^x + C$.

**(b)** ¿Hay sólo una función $F$ que satisfaga la ecuación dada en el inciso (a), o existen muchas funciones con esta característica?

**55.** Encuentre $\int \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right) dx$.

**OBJETIVO**

Encuentrar una antiderivada particular de una función que satisface ciertas condiciones. Esto implica la evaluación de una constante de integración.

## 14.3 Integración con condiciones iniciales

Si se conoce la razón de cambio, $f'$, de la función $f$, entonces la función $f$ misma es una antiderivada de $f'$ (puesto que la derivada de $f$ es $f'$). Por supuesto, hay muchas antiderivadas de $f'$, y la más general se denota mediante la integral indefinida. Por ejemplo, si

$$f'(x) = 2x$$

entonces

$$f(x) = \int f'(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + C \qquad (1)$$

Es decir, *cualquier* función de la forma $f(x) = x^2 + C$ tiene su derivada igual a $2x$. Note que debido a la constante de integración, no se conoce $f(x)$ específicamente. Sin embargo, si $f$ debe tener cierto valor para un valor particular de $x$, es posible determinar el valor de $C$ y así determinar específicamente $f(x)$. Por ejemplo, si $f(1) = 4$, con base en la ecuación (1),

$$f(1) = 1^2 + C$$
$$4 = 1 + C$$
$$C = 3$$

Así,

$$f(x) = x^2 + 3$$

Es decir, ahora ya se conoce la función particular $f(x)$ para la cual $f'(x) = 2x$ y $f(1) = 4$. La condición $f(1) = 4$, que da un valor de $f$ para un valor específico de $x$, se llama una *condición inicial*.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**PROBLEMA CON CONDICIÓN INICIAL**

La tasa de crecimiento de una especie de bacterias se estima por medio de $\frac{dN}{dt} = 800 + 200e^t$, donde $N$ es el número de bacterias (en miles) después de $t$ horas. Si $N(5) = 40\,000$, encuentre $N(t)$.

## EJEMPLO 1 Problema con condición inicial

*Si y es una función de x tal que $y' = 8x - 4$ y $y(2) = 5$, encuentre y. [Nota: $y(2) = 5$ significa que $y = 5$ cuando $x = 2$.] Encuentre también $y(4)$.*

**Solución:** Aquí, $y(2) = 5$ es la condición inicial. Como $y' = 8x - 4$, $y$ es una antiderivada de $8x - 4$:

$$y = \int (8x - 4)\, dx = 8 \cdot \frac{x^2}{2} - 4x + C = 4x^2 - 4x + C \tag{2}$$

Es posible determinar el valor de $C$ por medio de la condición inicial. Debido a que $y = 5$ cuando $x = 2$, de la ecuación (2), se tiene

$$5 = 4(2)^2 - 4(2) + C$$
$$5 = 16 - 8 + C$$
$$C = -3$$

Al reemplazar $C$ por $-3$ en la ecuación (2) se obtiene la función deseada:

$$y = 4x^2 - 4x - 3 \tag{3}$$

Para encontrar $y(4)$, se establece que $x = 4$ en la ecuación (3):

$$y(4) = 4(4)^2 - 4(4) - 3 = 64 - 16 - 3 = 45$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**PROBLEMA CON CONDICIÓN INICIAL QUE IMPLICA A $y''$**

La aceleración de un objeto después de $t$ segundos está dada por $y'' = 84t + 24$, la velocidad a los 8 segundos está dada por $y'(8) = 2891$ pies/s, y la posición a los dos segundos es $y(2) = 184$ pies. Encuentre $y(t)$.

## EJEMPLO 2 Problema con condición inicial que implica a $y''$

*Dado que $y'' = x^2 - 6$, $y'(0) = 2$ y $y(1) = -1$, encuentre $y$.*

**Solución:**

**Estrategia** Para pasar de $y''$ a $y$, son necesarias dos integraciones: la primera lleva de $y''$ a $y'$, y la otra de $y'$ a $y$. Por lo tanto, se tendrán dos constantes de integración, que se denotarán como $C_1$ y $C_2$.

Como $y'' = \frac{d}{dx}(y') = x^2 - 6$, $y'$ es una antiderivada de $x^2 - 6$. Así que,

$$y' = \int (x^2 - 6)\, dx = \frac{x^3}{3} - 6x + C_1 \tag{4}$$

Ahora, $y'(0) = 2$ significa que $y' = 2$ cuando $x = 0$; por lo tanto, de la ecuación (4), se tiene

$$2 = \frac{0^3}{3} - 6(0) + C_1$$

De aquí, $C_1 = 2$, de modo que

$$y' = \frac{x^3}{3} - 6x + 2$$

Por integración, es posible encontrar $y$:

$$y = \int \left(\frac{x^3}{3} - 6x + 2\right) dx$$
$$= \left(\frac{1}{3}\right)\frac{x^4}{4} - (6)\frac{x^2}{2} + 2x + C_2$$

así

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x + C_2 \tag{5}$$

Ahora, como $y = -1$ cuando $x = 1$, de la ecuación (5) se tiene

$$-1 = \frac{1^4}{12} - 3(1)^2 + 2(1) + C_2$$

Así, $C_2 = -\frac{1}{12}$, por lo que

$$y = \frac{x^4}{12} - 3x^2 + 2x - \frac{1}{12}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

La integración con condiciones iniciales es útil en muchos casos prácticos como lo ilustran los ejemplos siguientes.

## EJEMPLO 3 Ingreso y educación

*Algunos sociólogos estudiaron el ingreso anual promedio actual y (en dólares) que una persona de un grupo urbano particular con x años de educación puede esperar recibir al buscar un empleo ordinario. Estimaron que la razón a la que el ingreso cambia con respecto a la educación está dada por*

$$\frac{dy}{dx} = 100x^{3/2} \quad 4 \le x \le 16$$

*donde* $y = 28\,720$ *cuando* $x = 9$. *Encuentre* $y$.

**Solución:** Aquí $y$ es una antiderivada de $100^{3/2}$. Entonces,

$$\begin{aligned} y &= \int 100x^{3/2}\,dx = 100\int x^{3/2}\,dx \\ &= (100)\frac{x^{5/2}}{\frac{5}{2}} + C \qquad (6) \\ y &= 40x^{5/2} + C \end{aligned}$$

La condición inicial es que $y = 28\,720$ cuando $x = 9$. Tras sustituir estos valores en la ecuación (6), es posible determinar el valor de $C$:

$$\begin{aligned} 28\,720 &= 40(9)^{5/2} + C \\ &= 40(243) + C \\ 28\,720 &= 9720 + C \end{aligned}$$

Por lo tanto, $C = 19\,000$ y

$$y = 40x^{5/2} + 19\,000.$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

## EJEMPLO 4 Determinación de la función de demanda a partir del ingreso marginal

*Si la función de ingreso marginal para el producto de un fabricante es*

$$\frac{dr}{dq} = 2000 - 20q - 3q^2$$

*encuentre la función de demanda.*

**Solución:**

**Estrategia** Al integrar $dr/dq$ y usar una condición inicial, se puede encontrar la función de ingreso $r$. Pero el ingreso está dado también por la relación general $r = pq$, donde $p$ es el precio por unidad. Así, $p = r/q$. Si se reemplazar $r$ en esta ecuación por la función de ingreso, se obtiene la función de demanda.

Como $dr/dq$ es la derivada del ingreso total $r$,

$$r = \int (2000 - 20q - 3q^2)\,dq$$

$$= 2000q - (20)\frac{q^2}{2} - (3)\frac{q^3}{3} + C$$

de manera que

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3 + C \qquad (7)$$

El ingreso es 0 cuando $q$ es 0.

Se supone que **cuando no se ha vendido ninguna unidad, no hay ingreso**; esto es, $r = 0$ cuando $q = 0$. Ésta es la condición inicial. Si se sustituyen estos valores en la ecuación (7) resulta

$$0 = 2000(0) - 10(0)^2 - 0^3 + C$$

Aunque $q = 0$ da $C = 0$, por lo general esto no es cierto. Ocurre en esta sección porque las funciones de ingreso son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en $q = 0$ puede producir para $C$ un valor distinto de cero.

Por lo tanto, $C = 0$ y

$$r = 2000q - 10q^2 - q^3$$

Para encontrar la función de demanda, se usa el hecho de que $p = r/q$ y se sustituye el valor de $r$:

$$p = \frac{r}{q} = \frac{2000q - 10q^2 - q^3}{q}$$

$$p = 2000 - 10q - q^2$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 11

## EJEMPLO 5 Determinación del costo a partir del costo marginal

*En la manufactura de un producto, los costos fijos por semana son de* \$4000. *(Los costos fijos son costos como la renta y el seguro, que permanecen constantes a todos los niveles de producción en un periodo dado). Si la función de costo marginal es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2$$

*donde c es el costo total (en dólares) de producir q libras de producto por semana, encuentre el costo de producir* 10 000 *lb en* 1 *semana.*

**Solución:** Como $dc/dq$ es la derivada del costo total $c$,

$$c(q) = \int [0.000001(0.002q^2 - 25q) + 0.2]\,dq$$

$$= 0.000001 \int (0.002q^2 - 25q)\,dq + \int 0.2\,dq$$

$$c(q) = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + C$$

Cuando $q$ es $0$, el costo total es igual al costo fijo.

Los costos fijos son constantes sin importar el nivel de producción. Por lo tanto, cuando $q = 0$, $c = 4000$, lo cual representa la condición inicial. Se establece que $c(0) = 4000$ en la última ecuación, se encuentra que $C = 4000$, por lo que

Aunque $q = 0$ le da a $C$ un valor igual al costo fijo, esto no es cierto en general. Ocurre en esta sección porque las funciones de costo son polinomiales. En secciones posteriores, la evaluación en $q = 0$ puede producir un valor para $C$ que es diferente al costo fijo.

$$c(q) = 0.000001\left(\frac{0.002q^3}{3} - \frac{25q^2}{2}\right) + 0.2q + 4000 \qquad (8)$$

A partir de la ecuación (8), se tiene $c(10\,000) = 5416\frac{2}{3}$. Así, el costo total de producir 10 000 libras de producto en una semana es de \$5416.67.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

## Problemas 14.3

*En los problemas 1 y 2, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.*

*1. $dy/dx = 3x - 4; \quad y(-1) = \frac{13}{2}$

2. $dy/dx = x^2 - x; \quad y(3) = \frac{19}{2}$

*En los problemas 3 y 4, si y satisface las condiciones dadas, encuentre y(x) para el valor dado de x.*

3. $y' = 5/\sqrt{x}$, $y(9) = 50$; $\quad x = 16$

4. $y' = -x^2 + 2x$, $y(2) = 1$; $\quad x = 1$

*En los problemas 5 a 8, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.*

*5. $y'' = -3x^2 + 4x; \quad y'(1) = 2,\ y(1) = 3$

6. $y'' = x + 1; \quad y'(0) = 0,\ y(0) = 5$

7. $y''' = 2x; \quad y''(-1) = 3,\ y'(3) = 10,\ y(0) = 13$

8. $y''' = e^x + 1; \quad y''(0) = 1,\ y'(0) = 2,\ y(0) = 3$

*En los problemas 9 a 12, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.*

9. $dr/dq = 0.7$

10. $dr/dq = 10 - \dfrac{1}{16}q$

*11. $dr/dq = 275 - q - 0.3q^2$

12. $dr/dq = 5000 - 3(2q + 2q^3)$

*En los problemas 13 a 16 dc/dq es una función de costo marginal y los costos fijos están indicados entre llaves. Para los problemas 13 y 14, encuentre la función de costo total. En los problemas 15 y 16 encuentre el costo total para el valor indicado de q.*

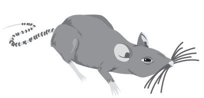
13. $dc/dq = 1.35; \quad \{200\}$

14. $dc/dq = 2q + 75; \quad \{2000\}$

*15. $dc/dq = 0.08q^2 - 1.6q + 6.5; \quad \{8000\}; \quad q = 25$

16. $dc/dq = 0.000204q^2 - 0.046q + 6; \quad \{15\ 000\}; \quad q = 200$

*17. **Dieta para ratas** Un grupo de biólogos estudió los efectos nutricionales en ratas a las que se alimentó con una dieta en la que 10% era proteína.[2] La proteína consistió en levadura y harina de maíz.



En un periodo de tiempo, el grupo encontró que la razón de cambio (aproximada) del aumento promedio de peso $G$ (en gramos) de una rata, con respecto al porcentaje $P$ de levadura en la mezcla proteínica fue

$$\frac{dG}{dP} = -\frac{P}{25} + 2 \qquad 0 \le P \le 100$$

Si $G = 38$ cuando $P = 10$, encuentre $G$.

18. **Polilla de invierno** Se llevó a cabo un estudio acerca de la polilla de invierno en Nueva Escocia.[3] Las larvas de la polilla caen al suelo de los árboles huéspedes. Se encontró que la razón (aproximada) con que la densidad $y$ (el número de larvas por pie cuadrado de suelo) cambia con respecto a la distancia $x$ (en pies), desde la base de un árbol huésped es

$$\frac{dy}{dx} = -1.5 - x \qquad 1 \le x \le 9$$

Si $y = 57.3$ cuando $x = 1$, encuentre $y$.

19. **Flujo de un fluido** En el estudio del flujo de un fluido en un tubo de radio constante $R$, como el torrente sanguíneo en ciertas partes del cuerpo, puede considerarse que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio $r$, donde $0 \le r \le R$. La velocidad $v$ del fluido es una función de $r$ y está dada por[4]

$$v = \int -\frac{(P_1 - P_2)r}{2l\eta}\, dr$$

donde $P_1$ y $P_2$ son las presiones en los extremos del tubo, $\eta$ (una letra griega que se lee "eta") es la viscosidad del fluido y $l$ es la longitud del tubo. Si $v = 0$ cuando $r = R$, demuestre que

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4l\eta}$$

20. **Elasticidad de la demanda** El único productor de un artículo ha determinado que la función de ingreso marginal es

$$\frac{dr}{dq} = 100 - 3q^2$$

Determine la elasticidad puntual de la demanda para el producto cuando $q = 5$. (*Una pista*: Encuentre primero la función de demanda.)

21. **Costo promedio** Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dc}{dq} = 0.003q^2 - 0.4q + 40$$

donde $q$ es el número de unidades producidas. Si el costo marginal es de \$27.50 cuando $q = 50$ y los costos fijos son de \$5000, ¿cuál es el costo *promedio* de producir 100 unidades?

22. Si $f''(x) = 30x^4 + 12x$ y $f'(1) = 10$, evalúe

$$f(965.335245) - f(-965.335245)$$

**OBJETIVO**

Aprender y aplicar las fórmulas para $\int u^n\, du$, $\int e^u\, du$ y $\int \frac{1}{u}\, du$.

## 14.4 Más fórmulas de integración

### Regla de la potencia para la integración

La fórmula

$$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{si } n \ne -1$$

---

[2]Adaptado de R. Bressani, "The Use of Yeast in Human Foods", en *Single-Cell Protein*; ed. R. I. Mateles y S. R. Tannenbaum (Cambridge, MA: MIT Press, 1968).

[3]Adaptado de D. G. Embree, "The Population Dynamics of the Winter Moth in Nova Scotia, 1954-1962", *Memoirs of the Entomological Society of Canada*, núm. 46 (1965).

[4]R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill, 1955).

que se aplica a una potencia de $x$, puede generalizarse para manejar una potencia de una *función* de $x$. Sea $u$ una función diferenciable de $x$. Por medio de la regla de la potencia para la diferenciación, si $n \neq -1$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(u(x))^{n+1}}{n+1}\right) = \frac{(n+1)(u(x))^n \cdot u'(x)}{n+1} = (u(x))^n \cdot u'(x)$$

Así,

$$\int (u(x))^n \cdot u'(x)\,dx = \frac{(u(x))^{n+1}}{n+1} + C \quad n \neq -1$$

A ésta se le llama la *regla de la potencia para la integración*. Observe que $u'(x)\,dx$ es la diferencial de $u$, es decir $du$. Por medio de un atajo matemático, es posible reemplazar $u(x)$ por $u$ y $u'(x)\,dx$ por $du$:

**Regla de la potencia para la integración**

*Si u es diferenciable, entonces*

$$\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1 \tag{1}$$

Es esencial que usted se dé cuenta de la diferencia entre la regla de la potencia para la integración y la fórmula para $\int x^n\,dx$. En la regla de potencia, $u$ representa una función, mientras que en $\int x^n\,dx$, $x$ es una variable.

## EJEMPLO 1 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

**a.** *Encuentre* $\int (x+1)^{20}\,dx$.

**Solución:** Como el integrando es una potencia de la función $x+1$, se hará $u = x + 1$. Entonces $du = dx$, y $\int (x+1)^{20}\,dx$ tiene la forma $\int u^{20}\,du$. Por medio de la regla de la potencia para la integración,

$$\int (x+1)^{20}\,dx = \int u^{20}\,du = \frac{u^{21}}{21} + C = \frac{(x+1)^{21}}{21} + C$$

Observe que no se da la respuesta en términos de $u$, sino explícitamente en términos de $x$.

**b.** *Determine* $\int 3x^2(x^3+7)^3\,dx$.

**Solución:** Se observa que el integrando contiene una potencia de la función $x^3 + 7$. Sea $u = x^3 + 7$. Entonces $du = 3x^2\,dx$. Por fortuna, $3x^2$ aparece como un factor en el integrando y se tiene

Después de la integración, usted quizá quiera saber lo que sucedió con $3x^2$. Observe de nuevo que $du = 3x^2\,dx$.

$$\int 3x^2(x^3+7)^3\,dx = \int (x^3+7)^3[3x^2\,dx] = \int u^3\,du$$

$$= \frac{u^4}{4} + C = \frac{(x^3+7)^4}{4} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 3

Para aplicar la regla de la potencia para integración, algunas veces es necesario hacer un ajuste para obtener $du$ en el integrando, como lo ilustra el ejemplo 2.

## EJEMPLO 2 Ajuste para *du*

*Encuentre* $\int x\sqrt{x^2+5}\,dx$.

**Solución:** Esto se puede escribir como $\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx$. Observe que el integrando contiene una potencia de la función $x^2 + 5$. Si $u = x^2 + 5$, entonces $du = 2x\,dx$. Como el factor *constante* 2 en $du$ *no* aparece en el integrando, esta integral no tiene la forma

$\int u^n du$. Sin embargo, con $du = 2x\,dx$ es posible escribir $x\,dx = \frac{du}{2}$ de manera que la integral se convierte en

$$\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx = \int (x^2+5)^{1/2}[x\,dx] = \int u^{1/2}\frac{du}{2}$$

Al mover el factor *constante* $\frac{1}{2}$ al frente del signo de integral, se tiene

$$\int x(x^2+5)^{1/2}\,dx = \frac{1}{2}\int u^{1/2}\,du = \frac{1}{2}\left(\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right) + C = \frac{1}{3}u^{3/2} + C$$

**ADVERTENCIA**

La respuesta a un problema de integración debe expresarse en términos de la variable original.

que en términos de $x$ (como se requiere) da

$$\int x\sqrt{x^2+5}\,dx = \frac{(x^2+5)^{3/2}}{3} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

En el ejemplo 2, se necesitaba el *factor constante* de $2(u(x))^{1/2}u'(x)$ en el integrando $x\sqrt{x^2+5}$. En general, si se tiene $\int (u(x))^n \frac{u'(x)}{k}dx$, donde $k$ es una constante diferente de cero, se puede escribir

$$\int (u(x))^n \frac{u'(x)}{k}\,dx = \int u^n \frac{du}{k} = \frac{1}{k}\int u^n\,du$$

**ADVERTENCIA**

Es posible ajustar los factores constantes, pero no los factores variables.

para simplificar la integral, pero tales *ajustes* de la integral *no son posibles para factores variables*.

Cuando se use la forma $\int u^n\,du$, no se debe descuidar a $du$. Por ejemplo,

$$\int (4x+1)^2\,dx \neq \frac{(4x+1)^3}{3} + C$$

La forma correcta de resolver este problema es la siguiente. Sea $u = 4x + 1$, se tiene $du = 4dx$. Así, $dx = \frac{du}{4}$ y

$$\int (4x+1)^2\,dx = \int u^2\left[\frac{du}{4}\right] = \frac{1}{4}\int u^2\,du = \frac{1}{4}\cdot\frac{u^3}{3} + C = \frac{(4x+1)^3}{12} + C$$

## EJEMPLO 3 Aplicación de la regla de la potencia para la integración

**a.** *Encuentre* $\int \sqrt[3]{6y}\,dy$.

**Solución:** El integrando es $(6y)^{1/3}$, una potencia de una función. Sin embargo, en este caso la sustitución obvia $u = 6y$ se puede evitar. De manera más simple, se tiene

$$\int \sqrt[3]{6y}\,dy = \int 6^{1/3}y^{1/3}\,dy = \sqrt[3]{6}\int y^{1/3}\,dy = \sqrt[3]{6}\frac{y^{4/3}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3\sqrt[3]{6}}{4}y^{4/3} + C$$

**b.** *Encuentre* $\int \frac{2x^3+3x}{(x^4+3x^2+7)^4}\,dx$.

**Solución:** Esto se puede escribir como $\int (x^4+3x^2+7)^{-4}(2x^3+3x)\,dx$. Se tratará de utilizar la regla de la potencia para integración. Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces la cantidad $(2x^3 + 3x)\,dx$ de la integral. Así, $(2x^3+3x)\,dx = \frac{du}{2}$ y de nuevo se ilustra la técnica de *ajuste*:

$$\int (x^4+3x^2+7)^{-4}[(2x^3+3x)\,dx] = \int u^{-4}\left[\frac{du}{2}\right] = \frac{1}{2}\int u^{-4}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^{-3}}{-3} + C = -\frac{1}{6u^3} + C = -\frac{1}{6(x^4+3x^2+7)^3} + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Al utilizar la regla de la potencia para integración, tenga cuidado cuando haga su elección de $u$. En el ejemplo 3(b), *no* va a llegar muy lejos si, por ejemplo, elige $u = 2x^3 + 3x$. En ocasiones puede ser necesario intentar muchas opciones diferentes. No basta con sólo ver la integral. Intente algo, aun si se equivoca, ya que puede evocarle otras sugerencias que sí pueden funcionar. **El dominio de la integración sólo se alcanza después de muchas horas de práctica y estudio consciente.**

### EJEMPLO 4 Una integral a la que no se le aplica la regla de la potencia

*Encuentre* $\int 4x^2(x^4+1)^2\,dx$.

**Solución:** Si se establece $u = x^4 + 1$, entonces $du = 4x^3dx$. Para obtener $du$ en la integral, se necesita un factor adicional de la *variable* $x$. Sin embargo, sólo se pueden ajustar factores **constantes**. Así, no es posible utilizar la regla de la potencia. En lugar de eso, para encontrar la integral, primero se debe desarrollar $(x^4 + 1)^2$:

$$\begin{aligned}\int 4x^2(x^4+1)^2\,dx &= 4\int x^2(x^8+2x^4+1)\,dx\\ &= 4\int (x^{10}+2x^6+x^2)\,dx\\ &= 4\left(\frac{x^{11}}{11}+\frac{2x^7}{7}+\frac{x^3}{3}\right)+C\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 67

## Integración de funciones con la exponencial natural

Ahora se prestará atención a la integración de funciones exponenciales. Si $u$ es una función diferenciable de $x$, entonces

$$\frac{d}{dx}(e^u) = e^u\frac{du}{dx}$$

La fórmula de integración correspondiente a esta fórmula de diferenciación, es

**ADVERTENCIA**

No aplique la fórmula de la regla de la potencia para $\int u^n\,du$ a $\int e^u\,du$.

$$\int e^u\frac{du}{dx}\,dx = e^u + C$$

Pero, $\frac{du}{dx}\,dx$ es la diferencial de $u$, es decir, $du$. Así,

$$\int e^u\,du = e^u + C \qquad (2)$$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**INTEGRALES QUE INCLUYEN FUNCIONES EXPONENCIALES**

Cuando un objeto se mueve de un entorno a otro, su temperatura $T$ cambia a una razón dada por $\frac{dT}{dt} = kCe^{kt}$, donde $T$ es el tiempo (en horas) después de haberse reubicado, $C$ es la diferencia de temperaturas (la original menos la nueva) entre los entornos, y $k$ es una constante. Si el entorno original tiene una temperatura de $70°$ y el nuevo una de $60°$, y $k = -0.5$, encuentre la forma general de $T(t)$.

### EJEMPLO 5 Integrales que incluyen funciones exponenciales

**a.** *Encuentre* $\int 2xe^{x^2}\,dx$.

**Solución:** Sea $u = x^2$. Entonces $du = 2x\,dx$, y por la ecuación (2),

$$\begin{aligned}\int 2xe^{x^2}\,dx &= \int e^{x^2}[2x\,dx] = \int e^u\,du\\ &= e^u + C = e^{x^2} + C\end{aligned}$$

**b.** *Encuentre* $\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\, dx$.

**Solución:** Si $u = x^3 + 3x$, entonces $du = (3x^2 + 3)\, dx = 3(x^2 + 1)\, dx$. Si el integrando tuviese un factor de 3, la integral tendría la forma $\int e^u\, du$. Así, se puede escribir

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 1)e^{x^3+3x}\, dx &= \int e^{x^3+3x}[(x^2 + 1)\, dx] \\ &= \frac{1}{3}\int e^u\, du = \frac{1}{3}e^u + C \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3+3x} + C\end{aligned}$$

donde en el segundo paso se reemplazó $(x^2 + 1)\, dx$ por $\frac{1}{3}\, du$ pero se escribió $\frac{1}{3}$ fuera de la integral.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 41

## Integrales que incluyen funciones logarítmicas

Como usted sabe, la fórmula de la potencia $\int u^n\, du = u^{n+1}/(n + 1) + C$ no se aplica cuando $n = -1$. Para manejar esa situación, a saber, $\int u^{-1}\, du = \int \frac{1}{u}\, du$ primero se debe recordar que se expuso en la sección 12.1 que

$$\frac{d}{dx}(\ln |u|) = \frac{1}{u}\frac{du}{dx} \quad \text{para } u \neq 0$$

que proporciona la fórmula de integración

$$\int \frac{1}{u}\, du = \ln |u| + C \quad \text{para } u \neq 0 \tag{3}$$

En particular, si $u = x$, entonces $du = dx$, y

$$\int \frac{1}{x}\, dx = \ln |x| + C \quad \text{para } x \neq 0 \tag{4}$$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**INTEGRALES QUE INCLUYEN A $\frac{1}{u}\, du$**

Si la tasa de memorización de un vocabulario de una lengua extranjera de un estudiante promedio está dada por $\frac{dv}{dt} = \frac{35}{t+1}$, donde $v$ es el número de palabras del vocabulario memorizadas en $t$ horas de estudio, determine la forma general de $v(t)$.

### EJEMPLO 6 Integrales que incluyen a $\frac{1}{u}\, du$

**a.** *Encuentre* $\int \frac{7}{x}\, dx$.

**Solución:** De la ecuación (4),

$$\int \frac{7}{x}\, dx = 7\int \frac{1}{x}\, dx = 7 \ln |x| + C$$

Mediante las propiedades de los logaritmos se puede escribir esta respuesta en otra forma:

$$\int \frac{7}{x}\, dx = \ln |x^7| + C$$

**b.** *Encuentre* $\int \frac{2x}{x^2 + 5}\, dx$.

**Solución:** Sea $u = x^2 + 5$. Entonces $du = 2x\, dx$. De la ecuación (3),

$$\begin{aligned}\int \frac{2x}{x^2 + 5}\, dx &= \int \frac{1}{x^2 + 5}[2x\, dx] = \int \frac{1}{u}\, du \\ &= \ln |u| + C = \ln |x^2 + 5| + C\end{aligned}$$

Como $x^2 + 5$ siempre es positiva, es posible omitir las barras de valor absoluto:

$$\int \frac{2x}{x^2 + 5}\, dx = \ln(x^2 + 5) + C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

**EJEMPLO 7 Una integral que incluye $\frac{1}{u}\,du$**

*Encuentre* $\displaystyle\int \frac{(2x^3 + 3x)\,dx}{x^4 + 3x^2 + 7}$.

**Solución:** Si $u = x^4 + 3x^2 + 7$, entonces $du = (4x^3 + 6x)\,dx$, que es dos veces el numerador, de aquí que $(2x^3 + 3x)\,dx = \frac{du}{2}$. Para aplicar la ecuación (3), se escribe

$$\begin{aligned}\int \frac{2x^3 + 3x}{x^4 + 3x^2 + 7}\,dx &= \frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\,du \\ &= \frac{1}{2}\ln|u| + C \\ &= \frac{1}{2}\ln|x^4 + 3x^2 + 7| + C && \text{(Reescriba } u \text{ en términos de } x\text{)} \\ &= \frac{1}{2}\ln(x^4 + 3x^2 + 7) + C && (x^4 + 3x^2 + 7 > 0 \quad \text{para toda } x)\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 51

**EJEMPLO 8 Una integral que incluye dos formas**

*Encuentre* $\displaystyle\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw &= \int (1-w)^{-2}dw + \int \frac{1}{w-1}dw \\ &= -1\int (1-w)^{-2}[-dw] + \int \frac{1}{w-1}dw\end{aligned}$$

La primera integral tiene la forma $\int u^{-2}\,du$ y la segunda tiene la forma $\int \frac{1}{v}\,dv$. Así,

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{(1-w)^2} + \frac{1}{w-1}\right) dw &= -\frac{(1-w)^{-1}}{-1} + \ln|w-1| + C \\ &= \frac{1}{1-w} + \ln|w-1| + C\end{aligned}$$

Para su conveniencia, en la tabla 14.2 se enumerarn las fórmulas básicas de integración analizadas hasta el momento. Se supone que $u$ es una función de $x$.

**TABLA 14.2** Fórmulas básicas de integración

| | |
|---|---|
| 1. $\int k\,du = ku + C$ | $k$ es una constante |
| 2. $\int u^n\,du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ | $n \neq -1$ |
| 3. $\int \frac{1}{u}\,du = \ln|u| + C$ | $u \neq 0$ |
| 4. $\int e^u\,du = e^u + C$ | |
| 5. $\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$ | $k$ es una constante |
| 6. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$ | |

## Problemas 14.4

*En los problemas 1 a 80, encuentre las integrales indefinidas.*

**1.** $\int (x+5)^7\,dx$

**2.** $\int 15(x+2)^4\,dx$

***3.** $\int 2x(x^2+3)^5\,dx$

**4.** $\int (3x^2+10x)(x^3+5x^2+6)\,dx$

***5.** $\int (3y^2+6y)(y^3+3y^2+1)^{2/3}\,dy$

**6.** $\int (15t^2-6t+1)(5t^3-3t^2+t)^{17}\,dt$

**7.** $\int \frac{5}{(3x-1)^3}\,dx$ **8.** $\int \frac{4x}{(2x^2-7)^{10}}\,dx$

**9.** $\int \sqrt{2x-1}\,dx$ **10.** $\int \frac{1}{\sqrt{x-5}}\,dx$

**11.** $\int (7x-6)^4\,dx$ **12.** $\int x^2(3x^3+7)^3\,dx$

**13.** $\int u(5u^2-9)^{14}\,du$ **14.** $\int 9x\sqrt{1+2x^2}\,dx$

***15.** $\int 4x^4(27+x^5)^{1/3}\,dx$ **16.** $\int (4-5x)^9\,dx$

**17.** $\int 3e^{3x}\,dx$ **18.** $\int 5e^{3t+7}\,dt$

**19.** $\int (2t+1)e^{t^2+t}\,dt$ **20.** $\int -3w^2e^{-w^3}\,dw$

**21.** $\int xe^{7x^2}\,dx$ **22.** $\int x^3e^{4x^4}\,dx$

**23.** $\int 4e^{-3x}\,dx$ **24.** $\int x^4e^{-6x^5}\,dx$

**25.** $\int \frac{1}{x+5}\,dx$ **26.** $\int \frac{12x^2+4x+2}{x+x^2+2x^3}\,dx$

**27.** $\int \frac{3x^2+4x^3}{x^3+x^4}\,dx$ **28.** $\int \frac{6x^2-6x}{1-3x^2+2x^3}\,dx$

**29.** $\int \frac{6z}{(z^2-6)^5}\,dz$ **30.** $\int \frac{3}{(5v-1)^4}\,dv$

***31.** $\int \frac{4}{x}\,dx$ **32.** $\int \frac{3}{1+2y}\,dy$

**33.** $\int \frac{s^2}{s^3+5}\,ds$ **34.** $\int \frac{2x^2}{3-4x^3}\,dx$

**35.** $\int \frac{5}{4-2x}\,dx$ **36.** $\int \frac{7t}{5t^2-6}\,dt$

**37.** $\int \sqrt{5x}\,dx$ **38.** $\int \frac{1}{(3x)^6}\,dx$

**39.** $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-4}}\,dx$ **40.** $\int \frac{9}{1-3x}\,dx$

***41.** $\int 2y^3e^{y^4+1}\,dx$ **42.** $\int 2\sqrt{2x-1}\,dx$

**43.** $\int v^2e^{-2v^3+1}\,dv$ **44.** $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{2x^3+9}}\,dx$

**45.** $\int (e^{-5x}+2e^x)\,dx$ **46.** $\int 4\sqrt[3]{y+1}\,dy$

**47.** $\int (8x+10)(7-2x^2-5x)^3\,dx$

**48.** $\int 2ye^{3y^2}\,dy$ **49.** $\int \frac{x^2+2}{x^3+6x}\,dx$

**50.** $\int (e^x+2e^{-3x}-e^{5x})\,dx$ ***51.** $\int \frac{16s-4}{3-2s+4s^2}\,ds$

**52.** $\int (6t^2+4t)(t^3+t^2+1)^6\,dt$

**53.** $\int x(2x^2+1)^{-1}\,dx$

**54.** $\int (8w^5+w^2-2)(6w-w^3-4w^6)^{-4}\,dw$

**55.** $\int -(x^2-2x^5)(x^3-x^6)^{-10}\,dx$

**56.** $\int \frac{3}{5}(v-2)e^{2-4v+v^2}\,dv$ **57.** $\int (2x^3+x)(x^4+x^2)\,dx$

**58.** $\int (e^{3.1})^2\,dx$ **59.** $\int \frac{7+14x}{(4-x-x^2)^5}\,dx$

**60.** $\int (e^x-e^{-x})^2\,dx$ **61.** $\int x(2x+1)e^{4x^3+3x^2-4}\,dx$

**62.** $\int (u^3-ue^{6-3u^2})\,du$ **63.** $\int x\sqrt{(8-5x^2)^3}\,dx$

**64.** $\int e^{-x/7}\,dx$ **65.** $\int \left(\sqrt{2x}-\frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$

**66.** $\int 3\frac{x^4}{e^{x^5}}\,dx$ ***67.** $\int (x^2+1)^2\,dx$

**68.** $\int \left[x(x^2-16)^2-\frac{1}{2x+5}\right]dx$

**69.** $\int \left[\frac{x}{x^2+1}+\frac{x^5}{(x^6+1)^2}\right]dx$

**70.** $\int \left[\frac{3}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}\right]dx$

**71.** $\int \left[\frac{2}{4x+1}-(4x^2-8x^5)(x^3-x^6)^{-8}\right]dx$

**72.** $\int (r^3+5)^2\,dr$ **73.** $\int \left[\sqrt{3x+1}-\frac{x}{x^2+3}\right]dx$

**74.** $\int \left[\frac{x}{3x^2+5}-\frac{x^2}{(x^3+1)^3}\right]dx$

**75.** $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ **76.** $\int (e^5-3^e)\,dx$

**77.** $\int \frac{1+e^{2x}}{4e^x}\,dx$ **78.** $\int \frac{2}{t^2}\sqrt{\frac{1}{t}+9}\,dt$

**79.** $\int \frac{x+1}{x^2+2x}\ln(x^2+2x)\,dx$ **80.** $\int \sqrt[3]{x}e^{\sqrt[3]{8x^4}}\,dx$

*En los problemas 81 a 84, encuentre y sujeta a las condiciones dadas.*

**81.** $y'=(3-2x)^2;\quad y(0)=1$

**82.** $y'=\frac{x}{x^2+6};\quad y(1)=0$

**83.** $y'' = \frac{1}{x^2}$; $y'(-2) = 3$, $y(1) = 2$

**84.** $y'' = (x+1)^{3/2}$; $y'(3) = 0$, $y(3) = 0$

**85. Bienes raíces** La tasa de cambio del valor de una casa cuya construcción costó $350 000 puede modelarse por medio de $\frac{dV}{dt} = 8e^{0.05t}$, donde $t$ es el tiempo en años desde que la casa fue construida y $V$ es el valor (en miles de dólares) de la casa. Encuentre $V(t)$.

**86. Esperanza de vida** Si la tasa de cambio de la esperanza de vida $l$ al nacer, de las personas que nacen en Estados Unidos puede modelarse mediante $\frac{dl}{dt} = \frac{12}{2t+50}$, donde $t$ es el número de años a partir de 1940 y la esperanza de vida era de 63 años en 1940, encuentre la esperanza de vida para personas que nacieron en 1998.

**87. Oxígeno en los vasos capilares** En un análisis de la difusión del oxígeno en los vasos capilares[5] se usan cilindros concéntricos de radio $r$ como modelos de un vaso capilar. La concentración $C$ de oxígeno en el capilar está dada por

$$C = \int \left( \frac{Rr}{2K} + \frac{B_1}{r} \right) dr$$

donde $R$ es la razón constante con que el oxígeno se difunde en el capilar, y $K$ y $B_1$ son constantes. Encuentre $C$. (Escriba la constante de integración como $B_2$.)

**88.** Encuentre $f(2)$ si $f\left(\frac{1}{3}\right) = 2$ y $f'(x) = e^{3x+2} - 3x$.

## 14.5 Técnicas de integración

**OBJETIVO**

Analizar técnicas de manejo de problemas de integración más complejos, a saber, mediante la manipulación algebraica y por medio del ajuste del integrando a una forma conocida. Integrar una función exponencial con una base diferente a $e$ y determinar la función de consumo, dada la propensión marginal al consumo.

Ahora se considerará la resolución de problemas de integración más difíciles.

Cuando se deben integrar fracciones, a veces es necesario realizar una división preliminar para obtener formas de integración familiares, como lo muestra el ejemplo siguiente.

### EJEMPLO 1 División preliminar antes de la integración

**a.** *Encuentre* $\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx$.

**Solución:** En este caso, no es evidente una forma familiar de integración. Sin embargo, es posible descomponer el integrando en dos fracciones, al dividir cada término del numerador entre el denominador. Entonces se tiene

Aquí, el integrando se separa.

$$\int \frac{x^3 + x}{x^2}\, dx = \int \left( \frac{x^3}{x^2} + \frac{x}{x^2} \right) dx = \int \left( x + \frac{1}{x} \right) dx$$

$$= \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C$$

**b.** *Encuentre* $\int \frac{2x^3 + 3x^2 + x + 1}{2x + 1}\, dx$.

**Solución:** Aquí el integrando es un cociente de polinomios donde el grado del numerador es mayor o igual que el del denominador. En tal caso, primero se usa la división larga. Recuerde que si $f$ y $g$ son polinomios, con el grado de $f$ mayor o igual al grado de $g$, la división larga permite encontrar (solamente) los polinomios $q$ y $r$, donde $r$ es el polinomio cero, o bien el grado de $r$ es estrictamente menor que el grado de $g$, lo que satisface

$$\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$$

Si se usa una notación abreviada obvia, se ve que

$$\int \frac{f}{g} = \int \left( q + \frac{r}{g} \right) = \int q + \int \frac{r}{g}$$

Como la integración de un polinomio es fácil, se observa que la integración de funciones racionales se reduce a la tarea integrar *funciones racionales propias,* aquellas para las que el grado del numerador es estrictamente menor que el grado del denominador. En este caso se obtiene

[5]W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press. Inc., 1972).

Aquí se usó la división larga para reescribir el integrando.

$$\int \frac{2x^3+3x^2+x+1}{2x+1}\,dx = \int \left(x^2+x+\frac{1}{2x+1}\right)dx$$
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\int \frac{1}{2x+1}\,dx$$
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}\,d(2x+1)$$
$$= \frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln|2x+1|+C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## EJEMPLO 2 Integrales indefinidas

**a.** *Encuentre* $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)^3}\,dx.$

**Solución:** Esta integral puede escribirse como $\displaystyle\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx$. Considere la regla de la potencia para la integración con $u=\sqrt{x}-2$. Entonces $du=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,dx$, de manera que $\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2du$ y

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que pueda aplicarse la regla de la potencia para la integración.

$$\int \frac{(\sqrt{x}-2)^{-3}}{\sqrt{x}}\,dx = \int (\sqrt{x}-2)^{-3}\left[\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]$$
$$= 2\int u^{-3}\,du = 2\left(\frac{u^{-2}}{-2}\right)+C$$
$$= -\frac{1}{u^2}+C = -\frac{1}{(\sqrt{x}-2)^2}+C$$

**b.** *Encuentre* $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x}\,dx.$

**Solución:** Si $u=\ln x$, entonces $du=\dfrac{1}{x}\,dx$, y

Aquí la integral se ajusta a la forma conocida $\displaystyle\int \frac{1}{u}\,du.$

$$\int \frac{1}{x\ln x}\,dx = \int \frac{1}{\ln x}\left(\frac{1}{x}\,dx\right) = \int \frac{1}{u}\,du$$
$$= \ln|u|+C = \ln|\ln x|+C$$

**c.** *Encuentre* $\displaystyle\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}\,dw.$

**Solución:** Si $u=\ln w$, entonces $du=\dfrac{1}{w}dw$. Si se aplica la regla de la potencia para la integración, se tiene

Aquí la integral se ajusta a una forma en la que se pueda aplicar la regla de la potencia para la integración.

$$\int \frac{5}{w(\ln w)^{3/2}}dw = 5\int (\ln w)^{-3/2}\left[\frac{1}{w}dw\right]$$
$$= 5\int u^{-3/2}\,du = 5\cdot\frac{u^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}+C$$
$$= \frac{-10}{u^{1/2}}+C = -\frac{10}{(\ln w)^{1/2}}+C$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

## Integración de $b^u$

En la sección 14.4 se integró una función exponencial con base $e$:

$$\int e^u\,du = e^u+C$$

Ahora se considerará la integral de una función exponencial con una base diferente a $b$:

$$\int b^u\,du$$

Para encontrar esta integral, primero se convierte a la base $e$ con

$$b^u = e^{(\ln b)u} \tag{1}$$

(como ya se hizo en muchos ejemplos de diferenciación). El ejemplo 3 ilustrará este procedimiento.

### EJEMPLO 3 Una integral que incluye $b^u$

*Encuentre* $\int 2^{3-x}\,dx$.

**Solución:**

**Estrategia** Se desea integrar una función exponencial con base 2. Para hacerlo, primero se convierte de base 2 a base $e$ mediante la ecuación (1).

$$\int 2^{3-x}\,dx = \int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx$$

El integrando de la segunda integral tiene la forma $e^u$, donde $u = (\ln 2)(3 - x)$. Como $du = -\ln 2\,dx$, se puede despejar $dx$ y escribir

$$\begin{aligned}\int e^{(\ln 2)(3-x)}\,dx &= -\frac{1}{\ln 2}\int e^u\,du \\ &= -\frac{1}{\ln 2}e^u + C = -\frac{1}{\ln 2}e^{(\ln 2)(3-x)} + C = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C\end{aligned}$$

Así,

$$\int 2^{3-x}\,dx = -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C$$

Note que la respuesta se expresó en términos de una función exponencial con base 2, que es la base del integrando original.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

Si se generaliza el procedimiento descrito en el ejemplo 3, es posible obtener una fórmula para integrar $b^u$:

$$\begin{aligned}\int b^u du &= \int e^{(\ln b)u} du \\ &= \frac{1}{\ln b}\int e^{(\ln b)u}\,d((\ln b)u) && \text{(ln } b \text{ es una constante)} \\ &= \frac{1}{\ln b}e^{(\ln b)u} + C \\ &= \frac{1}{\ln b}b^u + C\end{aligned}$$

De aquí, se tiene

$$\boxed{\int b^u du = \frac{1}{\ln b}b^u + C}$$

Al aplicar esta fórmula a la integral del ejemplo 3 resulta

$$\begin{aligned}&\int 2^{3-x}\,dx && (b = 2, u = 3 - x) \\ &= -\int 2^{3-x}\,d(3-x) && (-d(3-x) = dx) \\ &= -\frac{1}{\ln 2}2^{3-x} + C\end{aligned}$$

que es el mismo resultado obtenido antes.

### Aplicación de la integración

Ahora se considerará una aplicación de la integración que relaciona una función de consumo con la propensión marginal al consumo.

**EJEMPLO 4 Determinación de una función de consumo a partir de la propensión marginal al consumo**

*Para cierto país, la propensión marginal al consumo está dada por*

$$\frac{dC}{dI} = \frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}$$

*donde el consumo C es una función del ingreso nacional I. Aquí, I se expresa en grandes denominaciones de dinero. Determine la función de consumo para el país, si se sabe que el consumo es de* 10 ($C = 10$) *cuando* $I = 12$.

**Solución:** Como la propensión marginal al consumo es la derivada de $C$, se tiene

$$C = C(I) = \int \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2\sqrt{3I}}\right) dI = \int \frac{3}{4} dI - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\, dI$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{2}\int (3I)^{-1/2}\, dI$$

Si se establece que $u = 3I$, entonces $du = 3dI = d(3I)$ y

$$C = \frac{3}{4}I - \left(\frac{1}{2}\right)\frac{1}{3}\int (3I)^{-1/2}\, d(3I)$$

$$= \frac{3}{4}I - \frac{1}{6}\frac{(3I)^{1/2}}{\frac{1}{2}} + K$$

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + K$$

Éste es un ejemplo de un problema con valor inicial.

Cuando $I = 12$, $C = 10$, por lo que

$$10 = \frac{3}{4}(12) - \frac{\sqrt{3(12)}}{3} + K$$

$$10 = 9 - 2 + K$$

Así, $K = 3$ y la función de consumo es

$$C = \frac{3}{4}I - \frac{\sqrt{3I}}{3} + 3$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 61

## Problemas 14.5

*En los problemas 1 a 56, determine las integrales indefinidas.*

*1. $\int \frac{2x^6 + 8x^4 - 4x}{2x^2}\, dx$

2. $\int \frac{9x^2 + 5}{3x}\, dx$

3. $\int (3x^2 + 2)\sqrt{2x^3 + 4x + 1}\, dx$

4. $\int \frac{x}{\sqrt[4]{x^2 + 1}}\, dx$

5. $\int \frac{9}{\sqrt{2 - 3x}}\, dx$

6. $\int \frac{2xe^{x^2}\, dx}{e^{x^2} - 2}$

7. $\int 4^{7x}\, dx$

8. $\int 5^t\, dt$

9. $\int 2x(7 - e^{x^2/4})\, dx$

10. $\int \left(e^x + x^e + ex + \frac{e}{x}\right) dx$

11. $\int \frac{6x^2 - 11x + 5}{3x - 1}\, dx$

12. $\int \frac{(3x + 2)(x - 4)}{x - 3}\, dx$

13. $\int \frac{5e^{2x}}{7e^{2x} + 4}\, dx$

14. $\int 6(e^{4-3x})^2\, dx$

15. $\int \frac{e^{7/x}}{x^2}\, dx$

16. $\int \frac{2x^4 - 6x^3 + x - 2}{x - 2}\, dx$

17. $\int \frac{5x^3}{x^2 + 9}\, dx$

18. $\int \frac{5 - 4x^2}{3 + 2x}\, dx$

19. $\int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{3\sqrt{x}}\, dx$

**20.** $\int \frac{5e^s}{1+3e^s}\,ds$

**21.** $\int \frac{5(x^{1/3}+2)^4}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx$

**22.** $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$

***23.** $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$

**24.** $\int \sqrt{t}(3-t\sqrt{t})^{0.6}\,dt$

**25.** $\int \frac{\ln^2(r+1)}{r+1}\,dr$

**26.** $\int \frac{9x^5-6x^4-ex^3}{7x^2}\,dx$

***27.** $\int \frac{3^{\ln x}}{x}\,dx$

**28.** $\int \frac{4}{x\ln(2x^2)}\,dx$

**29.** $\int x^2\sqrt{e^{x^3+1}}\,dx$

**30.** $\int \frac{x+3}{x+6}\,dx$

**31.** $\int \frac{8}{(x+3)\ln(x+3)}\,dx$

**32.** $\int (e^{e^2}+x^e-2x)\,dx$

**33.** $\int \frac{x^3+x^2-x-3}{x^2-3}\,dx$

**34.** $\int \frac{4x\ln\sqrt{1+x^2}}{1+x^2}\,dx$

**35.** $\int \frac{6x^2\sqrt{\ln(x^3+1)^2}}{x^3+1}\,dx$

**36.** $\int 3(x^2+2)^{-1/2}xe^{\sqrt{x^2+2}}\,dx$

**37.** $\int \left(\frac{x^3-1}{\sqrt{x^4-4x}}-\ln 7\right)dx$

**38.** $\int \frac{x-x^{-2}}{x^2+2x^{-1}}\,dx$

**39.** $\int \frac{2x^4-8x^3-6x^2+4}{x^3}\,dx$

**40.** $\int \frac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}\,dx$

**41.** $\int \frac{x}{x+1}\,dx$

**42.** $\int \frac{2x}{(x^2+1)\ln(x^2+1)}\,dx$

**43.** $\int \frac{xe^{x^2}}{\sqrt{e^{x^2}+2}}\,dx$

**44.** $\int \frac{5}{(3x+1)[1+\ln(3x+1)]^2}\,dx$

**45.** $\int \frac{(e^{-x}+6)^2}{e^x}\,dx$

**46.** $\int \left[\frac{1}{8x+1}-\frac{1}{e^x(8+e^{-x})^2}\right]dx$

**47.** $\int (x^3+ex)\sqrt{x^2+e}\,dx$

**48.** $\int 3^{x\ln x}(1+\ln x)\,dx$ (*Una pista:* $\frac{d}{dx}(x\ln x)=1+\ln x$)

**49.** $\int \sqrt{x}\sqrt{(8x)^{3/2}+3}\,dx$

**50.** $\int \frac{2}{x(\ln x)^{2/3}}\,dx$

**51.** $\int \frac{\sqrt{s}}{e^{\sqrt{s^3}}}\,ds$

**52.** $\int \frac{\ln^3 x}{3x}\,dx$

**53.** $\int e^{\ln(x^2+1)}\,dx$

**54.** $\int dx$

**55.** $\int \frac{\ln(xe^x)}{x}\,dx$

**56.** $\int e^{f(x)+\ln(f'(x))}\,dx$ se supone que $f'>0$

*En los problemas 57 y 58, dr/dq es una función de ingreso marginal. Encuentre la función de demanda.*

**57.** $\frac{dr}{dq}=\frac{200}{(q+2)^2}$

**58.** $\frac{dr}{dq}=\frac{900}{(2q+3)^3}$

*En los problemas 59 y 60, dc/dq es una función de costo marginal. Encuentre la función de costo total, si los costos fijos en cada caso son de 2000.*

**59.** $\frac{dc}{dq}=\frac{20}{q+5}$

**60.** $\frac{dc}{dq}=3e^{0.002q}$

*En los problemas 61 a 63, dC/dI representa la propensión marginal al consumo. Encuentre la función de consumo sujeta a la condición dada.*

***61.** $\frac{dC}{dI}=\frac{1}{\sqrt{I}}$; $C(9)=8$

**62.** $\frac{dC}{dI}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sqrt{2I}}$; $C(2)=\frac{3}{4}$

**63.** $\frac{dC}{dI}=\frac{3}{4}-\frac{1}{6\sqrt{I}}$; $C(25)=23$

**64. Función de costo** La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq}=10-\frac{100}{q+10}$$

donde $c$ es el costo total en dólares cuando se producen $q$ unidades. Cuando se producen 100 unidades, el costo promedio es de $50 por unidad. Al dólar más cercano, determine el costo fijo del fabricante.

**65. Función de costo** Suponga que la función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq}=\frac{100q^2-3998q+60}{q^2-40q+1}$$

donde $c$ es el costo total en dólares cuando se producen $q$ unidades.

**(a)** Determine el costo marginal cuando se producen 40 unidades.

**(b)** Si los costos fijos son de $10 000, encuentre el costo total de producir 40 unidades.

**(c)** Use el resultado de los incisos (a) y (b) y diferenciales para aproximar el costo total de producir 42 unidades.

**66. Función de costo** La función de costo marginal para el producto de un fabricante está dada por

$$\frac{dc}{dq}=\frac{9}{10}\sqrt{q}\sqrt{0.04q^{3/4}+4}$$

donde $c$ es el costo total en dólares cuando se producen $q$ unidades. Los costos fijos son de $360.

**(a)** Determine el costo marginal cuando se producen 25 unidades.

**(b)** Encuentre el costo total de producir 25 unidades.

**(c)** Use los resultados de los incisos (a) y (b) y diferenciales para estimar el costo total de producir 23 unidades.

**67. Valor de la tierra** Se estima que en $t$ años, contados a partir de ahora, el valor $V$ (en dólares) de un acre de tierra cerca del pueblo fantasma de Cherokee, California, se incrementa a una tasa de $\frac{8t^3}{\sqrt{0.2t^4+8000}}$ dólares por año. Si el valor actual de la tierra es de $500 por acre, ¿cuánto costará dentro de 10 años? Exprese su resultado al dólar más cercano.

**68. Función de ingreso** La función de ingreso marginal para el producto de un fabricante tiene la forma

$$\frac{dr}{dq}=\frac{a}{e^q+b}$$

para las constantes $a$ y $b$, donde $r$ es el ingreso total recibido (en dólares) cuando se producen y venden $q$ unidades. Encuentre la función de demanda y exprésela en la forma $p=f(q)$. (*Una pista*: Reescriba $dr/dq$ al multiplicar tanto el numerador como el denominador por $e^{-q}$.)

**69. Ahorro** La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{5}{(I+2)^2}$$

donde $S$ e $I$ representan el ahorro y el ingreso total nacional, respectivamente, y se miden en miles de millones de dólares. Si el consumo total nacional es de $7.5 miles de millones cuando el ingreso total nacional es de $8 mil millones, ¿para qué valor o valores de $I$ el ahorro total nacional es igual a cero?

**70. Función de consumo** La propensión marginal al ahorro en cierto país está dada por

$$\frac{dS}{dI} = \frac{1}{2} - \frac{1.8}{\sqrt[3]{3I^2}}$$

donde $S$ e $I$ representan el ahorro y el ingreso total nacional, respectivamente, y se miden en miles de millones de dólares.

**(a)** Determine la propensión marginal al consumo cuando el ingreso total nacional es de $81 mil millones.

**(b)** Determine la función de consumo si el ahorro es de $3 mil millones cuando el ingreso total nacional es de $24 mil millones.

**(c)** Use el resultado del inciso (b) para mostrar que el consumo es de $54.9 miles de millones cuando el ingreso total nacional es de $81 mil millones.

**(d)** Use diferenciales y los resultados de los incisos (a) y (c) para aproximar el consumo cuando el ingreso total nacional es de $78 mil millones.

**OBJETIVO**

Explicar, por medio del concepto de área, la integral definida como un límite de una suma especial; evaluar integrales definidas sencillas por medio del proceso de límite.

## 14.6 La integral definida

En la figura 14.2 se muestra la región $R$ limitada por las líneas $y = f(x) = 2x$, $y = 0$ (el eje $x$) y $x = 1$. La región es simplemente un triángulo rectángulo. Si $b$ y $h$ son las longitudes de la base y de la altura, respectivamente, entonces, a partir de la geometría, el área del triángulo es $A = \frac{1}{2}bh = \frac{1}{2}(1)(2) = 1$ unidad cuadrada. (De aquí en adelante, se tratarán las áreas como números puros y se escribirá *unidades cuadradas* sólo cuando sea necesario hacer énfasis en ello.) Ahora se encontrará esta área mediante otro método, el cual como se verá más adelante, se aplica a regiones más complejas. Este método implica la suma de áreas de rectángulos.

Se dividirá el intervalo $[0, 1]$ sobre el eje $x$, en cuatro subintervalos de igual longitud por medio de puntos igualmente separados, $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{2}{4}$, $x_3 = \frac{3}{4}$ y $x_4 = \frac{4}{4} = 1$. (Vea la figura 14.3.) Cada subintervalo tiene longitud de $\Delta x = \frac{1}{4}$. Estos subintervalos determinan cuatro subregiones de $R$: $R_1$, $R_2$, $R_3$ y $R_4$, como se indica.

Con cada subregión se puede asociar un rectángulo *circunscrito* (vea la figura 14.4), es decir, un rectángulo cuya base es el correspondiente subintervalo y cuya altura es el valor *máximo* de $f(x)$ en cada subintervalo. Como $f$ es una función creciente, el valor máximo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurre cuando $x$ es el extremo derecho de éste. Así, las áreas de los rectángulos circunscritos asociados con las regiones $R_1$, $R_2$, $R_3$ y $R_4$ son $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{4}{4})$, respectivamente. El área de cada rectángulo es una aproximación al área de su correspondiente subregión. Así, la suma de las áreas de estos rectángulos, denotada por $\overline{S}_4$, aproxima el área $A$ del triángulo. Se tiene

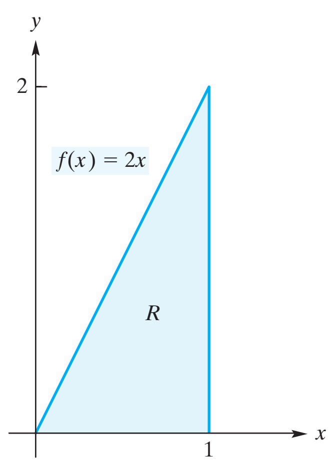



**FIGURA 14.2** Región acotada por $f(x) = 2x$, $y = 0$ y $x = 1$.

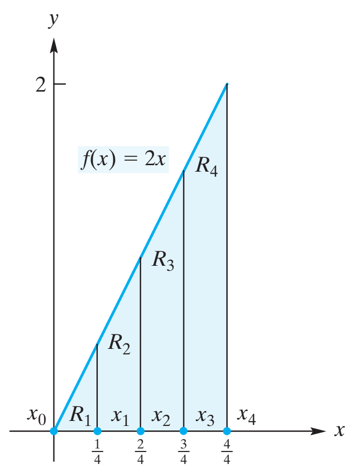



**FIGURA 14.3** Cuatro subregiones de $R$.

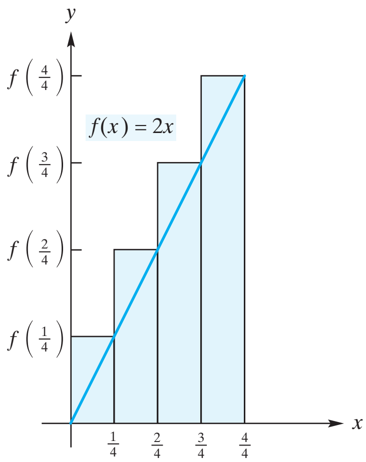



**FIGURA 14.4** Cuatro rectángulos circunscritos.

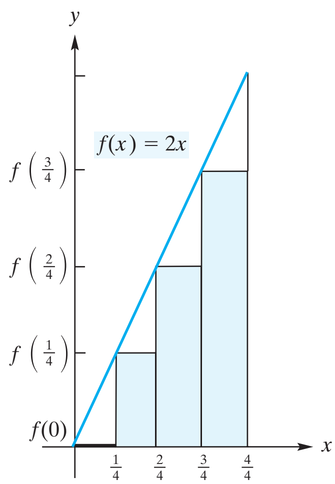



**FIGURA 14.5** Cuatro rectángulos inscritos.

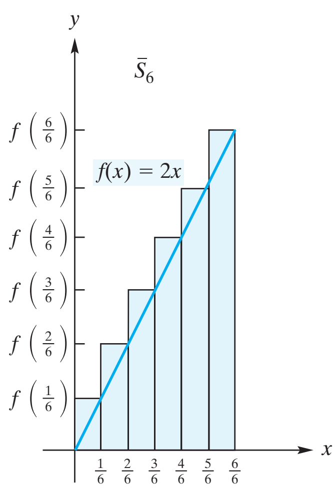



**FIGURA 14.6** Seis rectángulos circunscritos.

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_4 &= \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{3}{4}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{4}{4}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(2\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2\left(\tfrac{2}{4}\right) + 2\left(\tfrac{3}{4}\right) + 2\left(\tfrac{4}{4}\right)\right) = \tfrac{5}{4}
\end{aligned}
$$

Usted puede verificar que $\overline{S}_4 = \sum_{i=1}^{4} f(x_i)\Delta x$. El hecho de que $\overline{S}_4$ sea mayor que el área real del triángulo era de esperarse, puesto que $\overline{S}_4$ incluye áreas de regiones sombreadas que no pertenecen al triángulo. (Vea la figura 14.4).

Por otra parte, con cada subregión también se puede asociar un rectángulo *inscrito* (vea la figura 14.5), es decir, un rectángulo cuya base es el subintervalo correspondiente pero cuya altura es el valor *mínimo* de $f(x)$ en ese subintervalo. Como $f$ es una función creciente, el valor mínimo de $f(x)$ en cada subintervalo ocurrirá cuando $x$ sea el extremo izquierdo de éste. Así, las áreas de los cuatro rectángulos inscritos asociados con $R_1$, $R_2$, $R_3$ y $R_4$ son $\frac{1}{4}f(0)$, $\frac{1}{4}f(\frac{1}{4})$, $\frac{1}{4}f(\frac{2}{4})$ y $\frac{1}{4}f(\frac{3}{4})$, respectivamente. Su suma, denotada, también es una aproximación al área $A$ del triángulo. Se tiene

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_4 &= \tfrac{1}{4} f(0) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{1}{4}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{2}{4}\right) + \tfrac{1}{4} f\left(\tfrac{3}{4}\right) \\
&= \tfrac{1}{4}\left(2(0) + 2\left(\tfrac{1}{4}\right) + 2\left(\tfrac{2}{4}\right) + 2\left(\tfrac{3}{4}\right)\right) = \tfrac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Con la notación de sumatoria se puede escribir $\underline{S}_4 = \sum_{i=0}^{3} f(x_i)\Delta x$. Observe que $\underline{S}_4$ es menor que el área del triángulo porque los rectángulos no toman en cuenta aquella porción del triángulo que no está sombreada en la figura 14.5.

Como

$$\frac{3}{4} = \underline{S}_4 \leq A \leq \overline{S}_4 = \frac{5}{4}$$

se dice que $\underline{S}_4$ es una aproximación a $A$ desde *abajo* y $\overline{S}_4$ es una aproximación a $A$ desde *arriba*.

Si [0, 1] se divide en más subintervalos, se espera que ocurran mejores aproximaciones a $A$. Para probar esto, se usarán seis subintervalos de igual longitud $\Delta x = \frac{1}{6}$. Entonces $\overline{S}_6$, el área total de seis rectángulos circunscritos (vea la figura 14.6), y $\underline{S}_6$, el área total de seis rectángulos inscritos (vea la figura 14.7), son

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_6 &= \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{3}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{4}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{5}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{6}{6}\right) \\
&= \tfrac{1}{6}\left(2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{2}{6}\right) + 2\left(\tfrac{3}{6}\right) + 2\left(\tfrac{4}{6}\right) + 2\left(\tfrac{5}{6}\right) + 2\left(\tfrac{6}{6}\right)\right) = \tfrac{7}{6}
\end{aligned}
$$

y

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_6 &= \tfrac{1}{6} f(0) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{1}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{2}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{3}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{4}{6}\right) + \tfrac{1}{6} f\left(\tfrac{5}{6}\right) \\
&= \tfrac{1}{6}\left(2(0) + 2\left(\tfrac{1}{6}\right) + 2\left(\tfrac{2}{6}\right) + 2\left(\tfrac{3}{6}\right) + 2\left(\tfrac{4}{6}\right) + 2\left(\tfrac{5}{6}\right)\right) = \tfrac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Observe que $\underline{S}_6 \leq A \leq \overline{S}_6$, y, con la notación apropiada, tanto $\overline{S}_6$ como $\underline{S}_6$ serán de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Es claro que al usar seis subintervalos se obtuvo una mejor aproximación al área que con cuatro subintervalos, como era de esperarse.

De manera más general, si se divide [0, 1] en $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x$, entonces $\Delta x = 1/n$ y los puntos extremos de los subintervalos son $x = 0, 1/n, 2/n, \ldots, (n-1)/n$ y $n/n = 1$. (Vea la figura 14.8). Los extremos del $k$-ésimo subintervalo para $k = 1, \ldots, n$ son $(k-1)/n$ y $k/n$ y el valor máximo de $f$ ocurre en el extremo derecho $k/n$. De aquí se deduce que el área de $k$-ésimo rectángulo circunscrito es $1/n \cdot f(k/n) = 1/n \cdot 2(k/n) = 2k/n^2$, para $k = 1, \ldots, n$. El área total de $n$ rectángulos *circunscritos* es

$$
\begin{aligned}
\overline{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} f(k/n)\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2k}{n^2} \qquad (1) \\
&= \frac{2}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k \qquad \left(\text{al factorizar } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término}\right) \\
&= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \qquad (\text{de la sección 1.5}) \\
&= \frac{n+1}{n}
\end{aligned}
$$

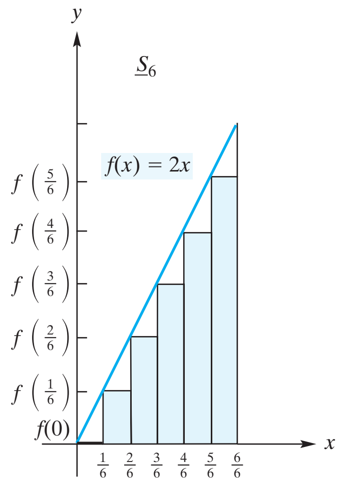



**FIGURA 14.7** Seis rectángulos inscritos.

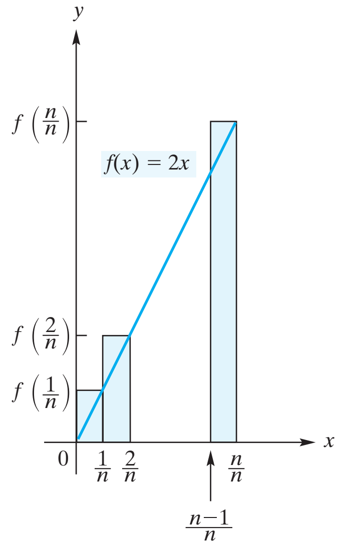



**FIGURA 14.8** $n$ rectángulos circunscritos.

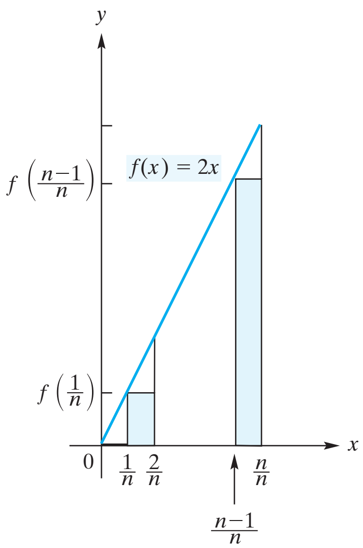



**FIGURA 14.9** $n$ rectángulos inscritos.

(Se debe recordar que $\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$ es la suma de los $n$ primeros enteros positivos y la fórmula que se acaba de usar se obtuvo en la sección 1.5, como un adelanto de su aplicación aquí.)

Para rectángulos *inscritos*, se observa que el valor mínimo de $f$ ocurre en el extremo izquierdo, $(k-1)/n$, de $[(k-1)/n, k/n]$ de manera que el área del $k$-ésimo rectángulo inscrito es $1/n \cdot f(k - 1/n) = 1/n \cdot 2((k-1)/n) = 2(k-1)/n^2$, para $k = 1, \ldots, n$. El área total determinada por *todos los n* rectángulos *inscritos* (vea la figura 14.9) es

$$
\begin{aligned}
\underline{S}_n &= \sum_{k=1}^{n} f((k-1)/n)\,\Delta x = \sum_{k=1}^{n} \frac{2(k-1)}{n^2} && \textbf{(2)}\\
&= \frac{2}{n^2} \sum_{k=1}^{n} k - 1 && \left(\text{al factorizar } \frac{2}{n^2} \text{ en cada término}\right)\\
&= \frac{2}{n^2} \sum_{k=0}^{n-1} k && (\text{al ajustar la sumatoria})\\
&= \frac{2}{n^2} \cdot \frac{(n-1)n}{2} && (\text{al adaptar de la sección 1.5})\\
&= \frac{n-1}{n}
\end{aligned}
$$

De las ecuaciones (1) y (2) se observa nuevamente que $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ son sumas de la forma $\sum f(x)\Delta x$, a saber, $\overline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\Delta x$ y $\underline{S}_n = \sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k-1}{n}\right)\Delta x$.

Por la naturaleza de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ parece razonable —y de hecho es cierto— que

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n$$

Conforme $n$ crece, $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$ resultan ser mejores aproximaciones para $A$. De hecho, se tomarán los límites de $\underline{S}_n$ y $\overline{S}_n$, cuando $n$ tienda a $\infty$ a través de valores enteros positivos:

$$\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$$

Como $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ tienen el mismo límite común, a saber.

$$\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n = \lim_{n\to\infty} \underline{S}_n = 1 \qquad \textbf{(3)}$$

y como

$$\underline{S}_n \leq A \leq \overline{S}_n$$

se debe considerar este límite como el área del triángulo. Así, $A = 1$, lo cual concuerda con el valor obtenido anteriormente. Es importante entender que aquí se desarrolló una *definición de la noción de área* que es aplicable a muchas regiones diferentes.

Se llama al límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, es decir 1, la *integral definida* de $f(x) = 2x$ sobre el intervalo de $x = 0$ a $x = 1$, y se denota esta cantidad al escribir

$$\int_0^1 2x\,dx = 1 \qquad \textbf{(4)}$$

La razón para usar el término *integral definida* y el simbolismo de la ecuación (4) será evidente en la siguiente sección. Los números 0 y 1 que aparecen con el signo $\int$ en la ecuación (4) se llaman *límites de integración*; 0 es el *límite inferior* y 1 es el *límite superior*.

En general, para una función $f$ definida en el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$, donde $a < b$, se pueden formar las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$, que se obtienen al consider los valores máximo y mínimo, respectivamente, en cada uno de $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x$.[6] Ahora se puede establecer lo siguiente:

> El límite común de $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ cuando $n \to \infty$, si éste existe, se llama la **integral definida** de $f$ sobre $[a, b]$ y se escribe
>
> $$\int_a^b f(x)\,dx$$
>
> Los números $a$ y $b$ se llaman **límites de integración**; $a$ es el **límite inferior** y $b$ es el **límite superior**. El símbolo $x$ se llama **variable de integración** y $f(x)$ es el **integrando**.

En términos de un proceso de límites, se tiene

$$\sum f(x)\,\Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx$$

La integral definida es el límite de las sumas de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. Esta interpretación será útil en secciones posteriores.

Es necesario aclarar dos puntos acerca de la integral definida. Primero, la integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\Delta x$. De hecho, se puede pensar en el signo de integral como una "$S$" alargada, que es la primera letra de "*s*umatoria". Segundo, para una función $f$ arbitraria definida en un intervalo, se pueden calcular las sumas $\overline{S}_n$ y $\underline{S}_n$ y determinar su límite común en caso de que exista. Sin embargo, algunos términos de las sumas pueden ser negativos, si $f(x)$ es negativa en puntos del intervalo. Estos términos no son áreas de rectángulos (un área nunca es negativa), por lo que el límite común puede no representar un área. Así, **la integral definida no es otra cosa que un número real y puede o no representar un área**.

Como se vio en la ecuación (3) $\lim_{n\to\infty} \underline{S}_n$ es igual a $\lim_{n\to\infty} \overline{S}_n$. Para una función arbitraria esto no siempre es cierto. Sin embargo, para las funciones que se considerarán, esos límites serán iguales y la integral definida siempre existirá. Para ahorrar tiempo, se usará sólo el **extremo derecho** de cada subintervalo al calcular una suma. Para las funciones en esta sección, esta suma se denotará como $S_n$.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**CÁLCULO DE UN ÁREA CON EL USO DE EXTREMOS DERECHOS**

Una compañía ha determinado que su función de ingreso marginal está dada por $R'(x) = 600 - 0.5x$, donde $R$ es el ingreso (en dólares) recibido cuando se venden $x$ unidades. Encuentre el ingreso total recibido por la venta de 10 unidades, determine el área en el primer cuadrante acotada por $y = R'(x) = 600 - 0.5x$ y las rectas $y = 0$, $x = 0$ y $x = 10$.

## EJEMPLO 1 Cálculo de un área con el uso de extremos derechos

*Encuentre el área de la región en el primer cuadrante limitada por $f(x) = 4 - x^2$ y las rectas $x = 0$ y $y = 0$.*

**Solución:** En la figura 14.10 se presenta el bosquejo de la región. Se ve que el intervalo en el cual varía $x$ es $[0, 2]$, que se subdividió en $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x$. Como la longitud de $[0, 2]$ es 2, se toma $\Delta x = 2/n$. Los extremos de los subintervalos son $x = 0, 2/n, 2(2/n), \ldots, (n-1)(2/n)$ y $n(2/n) = 2$, que se muestran en la figura 14.11. El diagrama también muestra los correspondientes rectángulos obtenidos con el extremo derecho de cada subintervalo. El área del $k$-ésimo rectángulo para $k = 1,\ldots, n$, es el producto de su ancho, $2/n$, y su altura, $f(k(2/n)) = 4 - (2k/n)^2$, que es el valor en el extremo derecho de su base. Al sumar estas áreas, se obtiene

En general, en $[a, b]$, se tiene

$$\Delta x = \frac{b-a}{n}$$

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f\left(k \cdot \left(\frac{2}{n}\right)\right)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(4 - \left(\frac{2k}{n}\right)^2\right)\frac{2}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{8}{n} - \frac{8k^2}{n^3}\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{8}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{8k^2}{n^3} = \frac{8}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2 \\
&= \frac{8}{n}n - \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= 8 - \frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

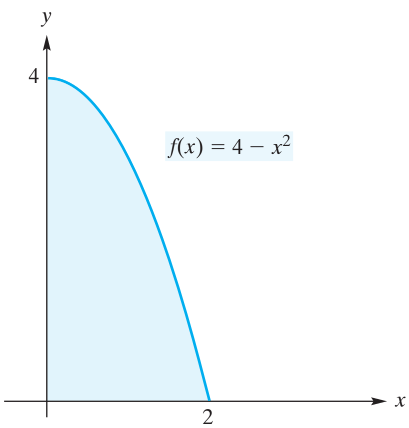



**FIGURA 14.10** Región del ejemplo 1.

[6] Aquí se supone que los valores máximo y mínimo existen.

En la segunda línea de los cálculos anteriores se usan manipulaciones básicas de la sumatoria, según se analizaron en la sección 1.5. En la tercera línea se utilizan fórmulas específicas de sumatoria, también provenientes de la sección 1.5: la suma de $n$ copias de 1 es $n$ y la suma de los primeros $n$ cuadrados es $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Por último, se considera el límite de $S_n$ cuando $n \to \infty$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} S_n &= \lim_{n\to\infty} \left(8 - \frac{4}{3}\left(\frac{(n+1)(2n+1)}{n^2}\right)\right) \\
&= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2n^2+3n+1}{n^2}\right) \\
&= 8 - \frac{4}{3} \lim_{n\to\infty} \left(2 + \frac{3}{n} + \frac{1}{n^2}\right) \\
&= 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3}
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, el área de la región es $\frac{16}{3}$.

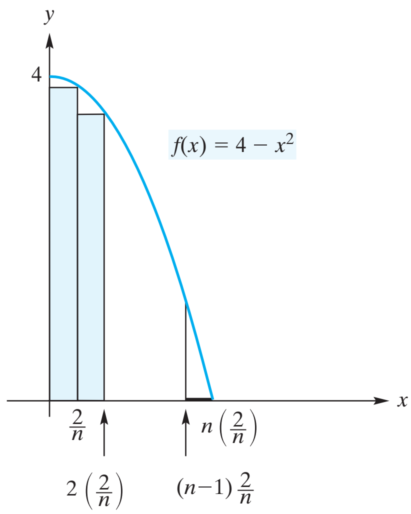



**FIGURA 14.11** $n$ subintervalos y los rectángulos correspondientes para el ejemplo 1.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

## EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida

*Evalúe* $\int_0^2 (4 - x^2)\, dx$.

**Solución:** Se desea encontrar la integral definida de $f(x) = 4 - x^2$ sobre el intervalo $[0, 2]$. Así, se debe calcular $\lim_{n\to\infty} S_n$. Pero este límite es precisamente el límite $\frac{16}{3}$ que se encontró en el ejemplo 1, por lo tanto, se concluye que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\, dx = \frac{16}{3}$$

No se anexan unidades a la respuesta porque una integral definida es simplemente un número.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

## EJEMPLO 3 Integración de una función sobre un intervalo

*Integre* $f(x) = x - 5$ *de* $x = 0$ *a* $x = 3$; *esto es, evalúe* $\int_0^3 (x-5)\, dx$.

**Solución:** Primero se divide $[0, 3]$ en $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x = 3/n$. Los puntos extremos son $0, 3/n, 2(3/n), \ldots, (n-1)(3/n), n(3/n) = 3$. (Vea la figura 14.12). Mediante los extremos derechos se forma la suma y se simplifica

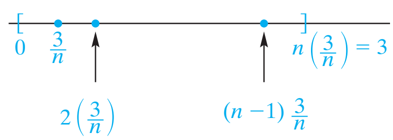



**FIGURA 14.12** División de $[0, 3]$ en $n$ subintervalos.

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f\left(k\frac{3}{n}\right)\frac{3}{n} \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\left(k\frac{3}{n} - 5\right)\frac{3}{n}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{9}{n^2}k - \frac{15}{n}\right) = \frac{9}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k - \frac{15}{n}\sum_{k=1}^{n} 1 \\
&= \frac{9}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right) - \frac{15}{n}(n) \\
&= \frac{9}{2}\frac{n+1}{n} - 15 = \frac{9}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 15
\end{aligned}
$$

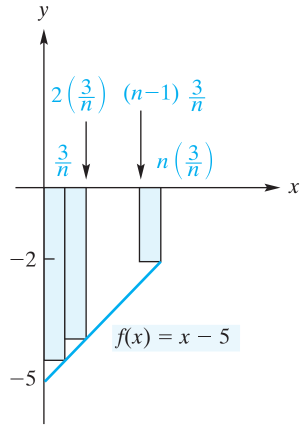



**FIGURA 14.13** $f(x)$ es negativa en cada extremo derecho.

Al calcular el límite, se obtiene

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-15\right) = \frac{9}{2}-15 = -\frac{21}{2}$$

Por lo tanto,

$$\int_0^3 (x-5)\,dx = -\frac{21}{2}$$

Observe que la integral definida en este caso es un número *negativo*. La razón es clara en la gráfica de $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. (Vea la figura 14.13). Como el valor $f(x)$ es negativo en cada extremo derecho, cada término en $S_n$ también debe ser negativo. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n$, que es la integral definida, tiene valor negativo.

Desde un punto de vista geométrico, cada término en $S_n$ es el valor negativo del área de un rectángulo. (Vea de nuevo la figura 14.13). Aunque la integral definida es sólo un número, aquí se puede interpretar como la representación del valor negativo del área de la región limitada por $f(x) = x - 5$, $x = 0$, $x = 3$ y el eje $x$ $(y = 0)$.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

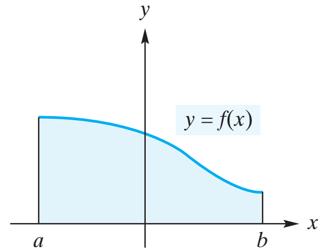



**FIGURA 14.14** Si $f$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ representa el área bajo la curva.

En el ejemplo 3 se demostró que la *integral definida no tiene que representar un área*. De hecho, ahí la integral definida fue negativa. Sin embargo, si $f$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $S_n \geq 0$ para todos los valores de $n$. Por lo tanto, $\lim_{n\to\infty} S_n \geq 0$, por lo que $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$. Además, está integral definida da el área de la región limitada por $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. (Vea la figura 14.14).

Aunque el procedimiento que se usó para analizar la integral definida es suficiente para los fines de este libro, no es riguroso. **Lo que es importante recordar acerca de la integral definida es que es el límite de una suma especial.**

## TECNOLOGÍA

Aquí se presenta un programa para la calculadora graficadora TI-83 Plus que estimará el límite de $S_n$ cuando $n \to \infty$ para una función $f$ definida en $[a, b]$.

```
PROGRAM:RIGHTSUM
Lbl 1
Input "SUBINTV",N
(B − A)/N → H
Ø → S
A + H → X
1 → I
Lbl 2
Y1 + S → S
X + H → X
I + 1 → I
If I ≤ N
Goto 2
H*S → S
Disp S
Pause
Goto 1
```

RIGHTSUM calculará $S_n$ para un número dado $n$ de subintervalos. Antes de ejecutar el programa, almacene $f(x)$, $a$ y $b$ como $Y_1$, A y B, respectivamente. Durante la ejecución del programa se le pedirá indicar el número de subintervalos. Después, el programa procederá a mostrar el valor de $S_n$. Cada vez que oprima ENTER, el programa se repetirá. De esta manera, pueden obtenerse los valores de $S_n$ para diferentes números de subintervalos. En la figura 14.15 se muestran valores de $S_n$ ($n = 100$, 1000 y 2000) para la función $f(x) = x - 5$ en el intervalo $[0, 3]$. Cuando $n \to \infty$, se observa que $S_n \to -10.5$. Así, se estima que

$$\lim_{n\to\infty} S_n \approx -10.5$$

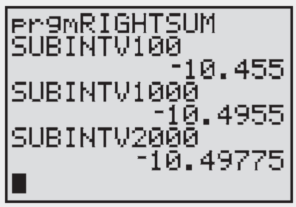



**FIGURA 14.15** Valores de $S_n$ para $f(x) = x - 5$ en $[0, 3]$.

De manera equivalente,

$$\int_0^3 (x-5)\,dx \approx -10.5$$

lo cual concuerda con el resultado obtenido en el ejemplo 3.

Es interesante notar que el tiempo requerido por una calculadora más antigua para calcular $S_{200}$ en la figura 14.15 fue mayor de 1.5 minutos. El tiempo necesario para la TI-84 Plus es de menos de 1 minuto.

## Problemas 14.6

*En los problemas 1 a 4, bosqueje la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Aproxime el área de la región por medio de la suma indicada. Use el extremo derecho de cada subintervalo.*

**1.** $f(x) = x,\ y = 0,\ x = 1;\quad S_3$

**2.** $f(x) = 3x,\ y = 0,\ x = 1;\quad S_5$

**3.** $f(x) = x^2,\ y = 0,\ x = 1;\quad S_4$

**4.** $f(x) = x^2 + 1,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1;\quad S_2$

*En los problemas 5 y 6, divida el intervalo indicado en n subintervalos de igual longitud y encuentre $S_n$ para la función dada. Use el extremo derecho de cada subintervalo. No encuentre el $\lim_{n\to\infty} S_n$.*

**5.** $f(x) = 4x;\quad [0, 1]$

**6.** $f(x) = 3x + 2;\quad [0, 3]$

*En los problemas 7 y 8, (a) simplifique $S_n$ y (b) encuentre $\lim_{n\to\infty} S_n$.*

***7.** $S_n = \dfrac{1}{n}\left[\left(\dfrac{1}{n}+1\right) + \left(\dfrac{2}{n}+1\right) + \cdots + \left(\dfrac{n}{n}+1\right)\right]$

**8.** $S_n = \dfrac{2}{n}\left[\left(\dfrac{2}{n}\right)^2 + \left(2\cdot\dfrac{2}{n}\right)^2 + \cdots + \left(n\cdot\dfrac{2}{n}\right)^2\right]$

*En los problemas 9 a 14, bosqueje la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Determine el área exacta de la región considerando el límite de $S_n$ cuando $n \to \infty$. Use el extremo derecho de cada subintervalo.*

**9.** Región descrita en el problema 1.

**10.** Región descrita en el problema 2.

**11.** Región descrita en e] problema 3.

**12.** $y = x^2,\ y = 0,\ x = 1,\ x = 2$

**13.** $f(x) = 3x^2,\ y = 0,\ x = 1$

**14.** $f(x) = 9 - x^2,\ y = 0,\ x = 0$

*En los problemas 15 a 20, evalúe la integral definida dada, tome el límite de $S_n$. Use el extremo derecho de cada subintervalo. Bosqueje la gráfica, en el intervalo dado, de la función que debe integrarse.*

**15.** $\displaystyle\int_1^3 5x\,dx$

**16.** $\displaystyle\int_0^4 9\,dx$

***17.** $\displaystyle\int_0^3 -4x\,dx$

**18.** $\displaystyle\int_1^4 (2x+1)\,dx$

***19.** $\displaystyle\int_0^1 (x^2+x)\,dx$

**20.** $\displaystyle\int_1^2 (x+2)\,dx$

**21.** Encuentre $D_x\left[\displaystyle\int_2^3 \sqrt{x^2+1}\,dx\right]$ sin usar límites.

**22.** Encuentre $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } 0 \le x < 1 \\ 4 - 2x & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 5x - 10 & \text{si } 2 \le x \le 3 \end{cases}$$

**23.** Encuentre $\displaystyle\int_{-1}^3 f(x)\,dx$ sin usar límites, donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \le 1 \\ 2 - x & \text{si } 1 \le x \le 2 \\ -1 + \dfrac{x}{2} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

*En los problemas 24 a 26, use un programa como el **RIGHTSUM**, para estimar el área de la región del primer cuadrante limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a un decimal.*

**24.** $f(x) = x^3 + 1,\ y = 0,\ x = 2,\ x = 3.7$

**25.** $f(x) = 4 - \sqrt{x},\ y = 0,\ x = 1,\ x = 9$

**26.** $f(x) = e^x,\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1$

*En los problemas 27 a 30, use un programa como el **RIGHTSUM**, para estimar el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a un decimal.*

**27.** $\displaystyle\int_2^5 \frac{x+1}{x+2}\,dx$

**28.** $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$

**29.** $\displaystyle\int_{-1}^2 (4x^2 + x - 13)\,dx$

**30.** $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,dx$

## 14.7 Teorema fundamental del cálculo integral

**OBJETIVO**

Desarrollar de manera informal el Teorema fundamental del cálculo integral y utilizarlo para obtener integrales definidas.

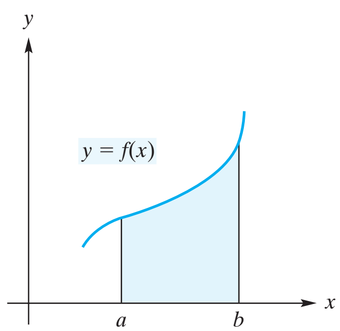



**FIGURA 14.16** En $[a, b]$, $f$ es continua y $f(x) \ge 0$.

### Teorema fundamental

Hasta ahora, se han considerado por separado los procesos de límite de la derivada y de la integral definida. Ahora se unirán esas ideas fundamentales y se desarrollará la importante relación que existe entre ellas. Como resultado, se podrán evaluar las integrales definidas en forma más eficiente.

En la figura 14.16 se da la gráfica de una función $f$. Suponga que $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y que su gráfica no cae debajo del eje $x$. Esto es, $f(x) \ge 0$. De la sección anterior, el área de la región debajo de la gráfica y arriba del eje $x$ desde $x = a$ hasta $x = b$, está dada por $\int_a^b f(x)\,dx$. A continuación se considerará otra manera de determinar esta área.

Suponga que existe una función $A = A(x)$, a la cual se hará referencia como una función de área, que proporciona el área de la región debajo de la gráfica de $f$ y arriba del eje $x$, desde $a$ hasta $x$, donde $a \le x \le b$. Esta región aparece sombreada en la figura 14.17. No confunda $A(x)$, que es un área, con $f(x)$, que es la altura de la gráfica en $x$.

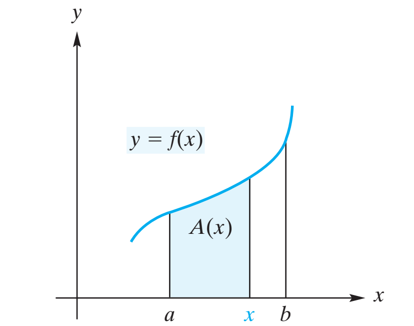



FIGURA 14.17 $A(x)$ es una función de área.

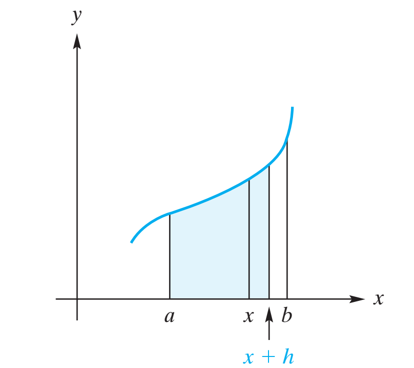



FIGURA 14.18 $A(x + h)$ proporciona el área de la región sombreada.

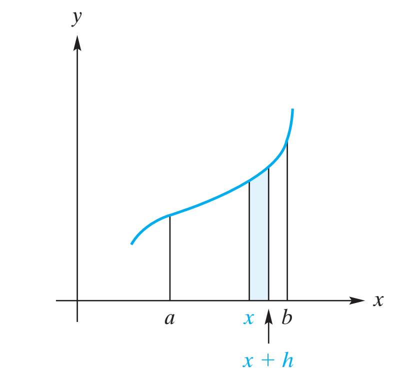



FIGURA 14.19 El área de la región sombreada es $A(x + h) - A(x)$.

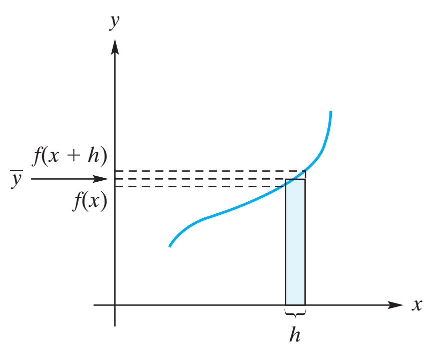



FIGURA 14.20 El área del rectángulo es la misma que el área de la región sombreada en la figura 14.19.

Con base en su definición, se pueden establecer inmediatamente dos propiedades de $A$:

1. $A(a) = 0$, puesto que no hay "área" desde $a$ hasta $a$
2. $A(b)$ es el área desde $a$ hasta $b$; esto es,

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si $x$ se incrementa en $h$ unidades, entonces $A(x + h)$ es el área de la región sombreada en la figura 14.18. Por lo tanto, $A(x + h) - A(x)$ es la diferencia de las áreas en las figuras 14.18 y 14.17, a saber, el área de la región sombreada en la figura 14.19. Para una $h$ suficientemente cercana a cero, el área de la región es la misma que la de un rectángulo (figura 14.20) cuya base sea $h$ y su altura algún valor $\bar{y}$ entre $f(x)$ y $f(x + h)$. Aquí $\bar{y}$ es una función de $h$. Así, por una parte el área del rectángulo es $A(x + h) - A(x)$ y, por otra, es $h\bar{y}$, por lo que

$$A(x + h) - A(x) = h\bar{y}$$

De manera equivalente,

$$\frac{A(x + h) - A(x)}{h} = \bar{y} \qquad \text{(al dividir entre } h\text{)}$$

Como $\bar{y}$ está entre $f(x)$ y $f(x + h)$, se sigue que como $h \to 0$, $\bar{y}$ se aproxima al número $f(x)$, por lo que

$$\lim_{h\to 0} \frac{A(x + h) - A(x)}{h} = f(x) \tag{1}$$

Pero el lado izquierdo es simplemente la derivada de $A$. Así, la ecuación se convierte en

$$A'(x) = f(x)$$

Se concluye que la función de área $A$ tiene la propiedad adicional de que su derivada $A'$ es $f$. Esto es, $A$ es una antiderivada de $f$. Ahora, suponga que $F$ es *cualquier* antiderivada de $f$. Entonces, como $A$ y $F$ son antiderivadas de la misma función, difieren cuando mucho en una constante $C$:

$$A(x) = F(x) + C \tag{2}$$

Recuerde que $A(a) = 0$. Por lo que, al evaluar ambos lados de la ecuación (2) para $x = a$, resulta

$$0 = F(a) + C$$

de manera que

$$C = -F(a)$$

Así, la ecuación (2) se convierte en

$$A(x) = F(x) - F(a) \tag{3}$$

Entonces, si $x = b$, de la ecuación (3)

$$A(b) = F(b) - F(a) \tag{4}$$

Pero recuerde que

$$A(b) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{5}$$

De las ecuaciones (4) y (5), se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La relación entre una integral definida y la antidiferenciación ahora está clara. Para encontrar $\int_a^b f(x)\,dx$ basta encontrar una antiderivada de $f$, digamos $F$, y restar el valor de $F$ en el límite inferior $a$, de su valor en el límite superior $b$. Aquí se supuso que $f$ era continua y $f(x) \geq 0$ para poder usar el concepto de un área. Sin embargo, el resultado es cierto para cualquier función continua[7], y se conoce como el *teorema fundamental del cálculo integral*.

### Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f$ es continua en el intervalo $[a, b]$ y $F$ es cualquier antiderivada de $f$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

La integral definida es un número, y una integral indefinida es una función.

Es importante que entienda la diferencia entre una integral definida y una integral indefinida. La **integral definida** $\int_a^b f(x)\,dx$ es un **número** definido como el límite de una suma. El teorema fundamental establece que la **integral indefinida** $\int f(x)\,dx$ (la antiderivada más general de $f$), la cual es una **función** de $x$ y está relacionada con el proceso de diferenciación, puede usarse para determinar este límite.

Suponga que se aplica el teorema fundamental para evaluar $\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$. Aquí, $f(x) = 4 - x^2$, $a = 0$ y $b = 2$. Como una antiderivada de $4 - x^2$ es $F(x) = 4x - (x^3/3)$, se sigue que

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = F(2) - F(0) = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - (0) = \frac{16}{3}$$

Esto confirma el resultado del ejemplo 2 de la sección 14.6. Si se hubiera escogido $F(x)$ como $4x - (x^3/3) + C$, entonces se tendría

$$F(2) - F(0) = \left[\left(8 - \frac{8}{3}\right) + C\right] - [0 + C] = \frac{16}{3}$$

igual que antes. Como el valor escogido para $C$ es irrelevante, por conveniencia se escogerá siempre igual a 0, como se hizo originalmente. Por lo general, $F(b) - F(a)$ se abrevia escribiendo

$$F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Como $F$ en el teorema fundamental del cálculo es *cualqu*ier antiderivada de $f$ y $\int f(x)\,dx$ es la antiderivada más general de $f$, surge la notación para escribir

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\int f(x)\,dx\right)\Big|_a^b$$

Con el uso de la notación $\Big|_a^b$, se tiene

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \left(8 - \frac{8}{3}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**APLICACIÓN DEL TEOREMA FUNDAMENTAL**

El ingreso (en dólares) de una cadena de comida rápida aumenta a una tasa de $f(t) = 10\,000e^{0.02t}$, donde $t$ está en años. Encuentre $\int_3^6 10\,000e^{0.02t}\,dt$ que proporciona el ingreso total para la cadena entre el tercero y sexto años.

### EJEMPLO 1 Aplicación del teorema fundamental

*Encuentre* $\displaystyle\int_{-1}^3 (3x^2 - x + 6)\,dx$.

**Solución:** Una antiderivada de $3x^2 - x + 6$ es

$$x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x$$

[7]Si $f$ es continua en $[a, b]$, puede demostrarse que $\int_a^b f(x)\,dx$ existe.

Así,

$$\int_{-1}^{3}(3x^2 - x + 6)\,dx$$
$$= \left(x^3 - \frac{x^2}{2} + 6x\right)\Bigg|_{-1}^{3}$$
$$= \left[3^3 - \frac{3^2}{2} + 6(3)\right] - \left[(-1)^3 - \frac{(-1)^2}{2} + 6(-1)\right]$$
$$= \left(\frac{81}{2}\right) - \left(-\frac{15}{2}\right) = 48$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## Propiedades de la integral definida

Para $\int_a^b f(x)\,dx$ se ha supuesto que $a < b$. Ahora se definen los casos en que $a > b$ o $a = b$. Primero,

$$\text{si } a > b, \text{entonces } \int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$$

Esto es, al intercambiar los límites de integración se cambia el signo de la integral. Por ejemplo,

$$\int_2^0 (4 - x^2)\,dx = -\int_0^2 (4 - x^2)\,dx$$

Si los límites de integración son iguales, se tiene

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

Algunas propiedades de la integral definida merecen mencionarse. La primera propiedad replantea más formalmente el comentario realizado en la sección anterior en relación con el área.

### Propiedades de la integral definida

1. Si $f$ es continua y $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ puede interpretarse como el área de la región limitada por la curva $y = f(x)$, el eje $x$ y las rectas $x = a$ y $x = b$.
2. $\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ donde $k$ es una constante.
3. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

Las propiedades 2 y 3 son similares a las reglas para las integrales indefinidas porque una integral definida puede evaluarse mediante el teorema fundamental en términos de una antiderivada. A continuación se dan dos propiedades más de las integrales definidas.

4. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$.

La variable de integración es una "variable ficticia" en el sentido de que cualquier otra variable produce el mismo resultado, es decir, el mismo número.

Para ilustrar la propiedad 4, usted puede verificar, por ejemplo, que

$$\int_0^2 x^2\,dx = \int_0^2 t^2\,dt$$

**5.** Si $f$ es continua sobre un intervalo $I$ y $a, b$ y $c$ están en $I$, entonces

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

La propiedad 5 significa que la integral definida en un intervalo puede expresarse en términos de integrales definidas en subintervalos. Así

$$\int_0^2 (4 - x^2)\,dx = \int_0^1 (4 - x^2)\,dx + \int_1^2 (4 - x^2)\,dx$$

Ahora se verán ejemplos de integración definida y en la sección 14.9 se calcularán algunas áreas.

## EJEMPLO 2 Uso del teorema fundamental

*Encuentre* $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx$.

**Solución:** Para encontrar una antiderivada del integrando, se aplicará la regla de la potencia para integración:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{1 + x^4}}\,dx &= \int_0^1 x^3(1 + x^4)^{-1/2}\,dx \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 (1 + x^4)^{-1/2}\,d(1 + x^4) = \left(\frac{1}{4}\right)\frac{(1 + x^4)^{1/2}}{\frac{1}{2}}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\left((2)^{1/2} - (1)^{1/2}\right) \\
&= \frac{1}{2}(\sqrt{2} - 1)
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 13

**ADVERTENCIA**

En el ejemplo 2, el valor de la antiderivada $\frac{1}{2}(1 + x^4)^{1/2}$ en el límite inferior 0 es $\frac{1}{2}(1)^{1/2}$. **No** suponga que una evaluación en el límite cero dará como resultado 0.

## EJEMPLO 3 Evaluación de integrales definidas

**a.** *Encuentre* $\displaystyle\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}
\int_1^2 [4t^{1/3} + t(t^2 + 1)^3]\,dt &= 4\int_1^2 t^{1/3}\,dt + \frac{1}{2}\int_1^2 (t^2 + 1)^3\,d(t^2 + 1) \\
&= (4)\,\frac{t^{4/3}}{\frac{4}{3}}\Bigg|_1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)\frac{(t^2 + 1)^4}{4}\Bigg|_1^2 \\
&= 3(2^{4/3} - 1) + \frac{1}{8}(5^4 - 2^4) \\
&= 3 \cdot 2^{4/3} - 3 + \frac{609}{8} \\
&= 6\sqrt[3]{2} + \frac{585}{8}
\end{aligned}$$

**b.** *Encuentre* $\displaystyle\int_0^1 e^{3t}\,dt$.

**Solución:**

$$\begin{aligned}
\int_0^1 e^{3t}\,dt &= \frac{1}{3}\int_0^1 e^{3t}\,d(3t) \\
&= \left(\frac{1}{3}\right)e^{3t}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}(e^3 - e^0) = \frac{1}{3}(e^3 - 1)
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 15

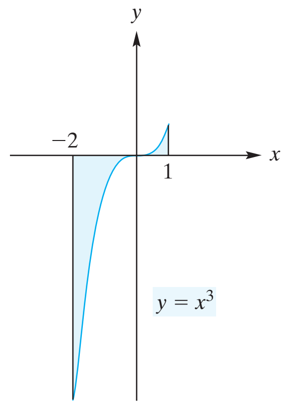



**FIGURA 14.21** Gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$.

**ADVERTENCIA**

Recuerde que $\int_a^b f(x)\,dx$ es un límite de un suma. En algunos casos este límite representa un área. En otros no. Cuando $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, la integral representa el área entre la gráfica de $f$ y el eje $x$ desde $x = a$ hasta $x = b$.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**CAMBIO EN LOS VALORES FUNCIONALES**

Un servicio administrativo determina que la tasa de incremento del costo de mantenimiento (en dólares por año) para un complejo privado de departamentos está dada por $M'(x) = 90x^2 + 5000$, donde $x$ es la edad del complejo de departamentos en años y $M(x)$ es el costo total (acumulado) de mantenimiento en $x$ años. Encuentre el costo para los primeros cinco años.

## EJEMPLO 4 Determinación e interpretación de una integral definida

*Evalúe* $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$.

**Solución:**

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_{-2}^{1} = \frac{1^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = \frac{1}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{15}{4}$$

La razón por la que el resultado es negativo es clara en la gráfica de $y = x^3$ en el intervalo $[-2, 1]$. (Vea la figura 14.21.) Para $-2 \leq x < 0$, $f(x)$ es negativa. Como una integral definida es el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, se deduce que $\int_{-2}^{0} x^3\,dx$ no es sólo un número negativo, sino también el negativo del área de la región sombreada en el tercer cuadrante. Por otra parte, $\int_0^1 x^3\,dx$ es e1 área de la región sombreada en el primer cuadrante, como $f(x) \geq 0$ en $[0, 1]$. La integral definida en el intervalo entero $[-2, 1]$ es la suma *algebraica* de estos números, debido a que, por la propiedad 5,

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx = \int_{-2}^{0} x^3\,dx + \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

Así, $\int_{-2}^{1} x^3\,dx$ no representa el área entre la curva y el eje $x$. Sin embargo, si se desea el área, ésta puede darse como

$$\left|\int_{-2}^{0} x^3\,dx\right| + \int_{0}^{1} x^3\,dx$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

## La integral definida de una derivada

Como una función $f$ es una antiderivada de $f'$, por el teorema fundamental se tiene

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \quad (6)$$

Pero $f'(x)$ es la razón de cambio de $f$ con respecto a $x$. De aquí que si se conoce la razón de cambio de $f$ y es necesario encontrar la diferencia entre los valores funcionales $f(b) - f(a)$, es suficiente con evaluar $\int_a^b f'(x)\,dx$.

## EJEMPLO 5 Determinación de un cambio en los valores funcionales por medio de la integración definida

*La función de costo marginal de un fabricante es*

$$\frac{dc}{dq} = 0.6q + 2$$

*Si la producción actual es* $q = 80$ *unidades por semana, ¿cuánto más costará incrementar la producción a* 100 *unidades por semana?*

**Solución:** La función de costo total es $c = c(q)$ y se desea encontrar la diferencia $c(100) - c(80)$. La razón de cambio de $c$ es $dc/dq$, entonces por la ecuación (6),

$$\begin{aligned}
c(100) - c(80) &= \int_{80}^{100} \frac{dc}{dq}dq = \int_{80}^{100} (0.6q + 2)dq \\
&= \left[\frac{0.6q^2}{2} + 2q\right]\Bigg|_{80}^{100} = [0.3q^2 + 2q]\Big|_{80}^{100} \\
&= [0.3(100)^2 + 2(100)] - [0.3(80)^2 + 2(80)] \\
&= 3200 - 2080 = 1120
\end{aligned}$$

Si $c$ está en dólares, entonces el costo de incrementar la producción de 80 a 100 unidades es \$1120.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 59

## TECNOLOGÍA

Varias calculadoras graficadoras tienen la capacidad de estimar el valor de una integral definida. En una TI-83 Plus, para estimar

$$\int_{80}^{100} (0.6q + 2)\,dq$$

se usa el comando fnInt( como se indica en la figura 14.22. Los cuatro parámetros que deben introducirse con este comando son:

| función que será integrada | variable de integración | límite inferior | límite superior |
|---|---|---|---|

Se observa que el valor de esta integral definida es aproximadamente de 1120, lo que concuerda con el resultado del ejemplo 5.

De manera similar, para estimar

$$\int_{-2}^{1} x^3\,dx$$

se introduce

fnInt(X³, X, −2, 1)

o en forma alterna, si primero se almacena $x^3$ como $Y_1$, se puede introducir

fnInt($Y_1$, X, −2, 1)

En cada caso se obtiene −3.75, lo cual concuerda con el resultado del ejemplo 4.

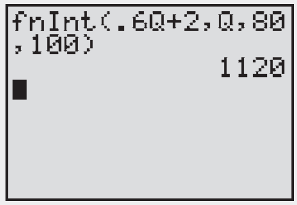



**FIGURA 14.22** Estimación de $\int_{80}^{100}(0.6q+2)\,dq$.

# Problemas 14.7

*En los problemas 1 a 43, evalúe la integral definida.*

*1. $\int_0^3 5\,dx$

2. $\int_2^4 (1-e)\,dx$

3. $\int_1^2 5x\,dx$

4. $\int_2^8 -5x\,dx$

5. $\int_{-3}^1 (2x-3)\,dx$

6. $\int_{-1}^1 (4-9y)\,dy$

7. $\int_2^3 (y^2-2y+1)\,dy$

8. $\int_4^1 (2t-3t^2)\,dt$

9. $\int_{-2}^{-1} (3w^2-w-1)\,dw$

10. $\int_8^9 dt$

11. $\int_1^3 3t^{-3}\,dt$

12. $\int_1^2 \frac{x^{-2}}{2}\,dx$

*13. $\int_{-8}^8 \sqrt[3]{x^4}\,dx$

14. $\int_{1/2}^{3/2} (x^2+x+1)\,dx$

*15. $\int_{1/2}^3 \frac{1}{x^2}\,dx$

16. $\int_9^{36} (\sqrt{x}-2)\,dx$

17. $\int_{-1}^1 (z+1)^5\,dz$

18. $\int_1^8 (x^{1/3}-x^{-1/3})\,dx$

19. $\int_0^1 2x^2(x^3-1)^3\,dx$

20. $\int_2^3 (x+2)^3\,dx$

21. $\int_1^8 \frac{4}{y}\,dy$

22. $\int_{-(e^e)}^{-1} \frac{6}{x}\,dx$

23. $\int_0^1 e^5\,dx$

24. $\int_2^{e+1} \frac{1}{x-1}\,dx$

*25. $\int_0^1 5x^2e^{x^3}\,dx$

26. $\int_0^1 (3x^2+4x)(x^3+2x^2)^4\,dx$

27. $\int_4^5 \frac{2}{(x-3)^3}\,dx$

28. $\int_{-1/3}^{20/3} \sqrt{3x+5}\,dx$

29. $\int_{1/3}^2 \sqrt{10-3p}\,dp$

30. $\int_{-1}^1 q\sqrt{q^2+3}\,dq$

31. $\int_0^1 x^2\sqrt[3]{7x^3+1}\,dx$

32. $\int_0^{\sqrt{7}} \left(3x - \frac{x}{(x^2+2)^{4/3}}\right)dx$

33. $\int_0^1 \frac{2x^3+x}{x^2+x^4+1}\,dx$

34. $\int_a^b (m+ny)\,dy$

35. $\int_0^1 \frac{e^x-e^{-x}}{2}\,dx$

36. $\int_{-2}^1 8|x|\,dx$

37. $\int_\pi^e 3(x^{-2}+x^{-3}-x^{-4})\,dx$

38. $\int_1^2 \left(6\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{2x}}\right)dx$

39. $\int_1^3 (x+1)e^{x^2+2x}\,dx$

40. $\int_1^{95} \frac{x}{\ln e^x}\,dx$

41. $\int_0^2 \frac{x^6+6x^4+x^3+8x^2+x+5}{x^3+5x+1}\,dx$

42. $\int_{-1}^1 \frac{2}{1+e^x}\,dx$ (*Una pista*: Multiplique el integrando por $\frac{e^{-x}}{e^{-x}}$.)

43. $\int_0^2 f(x)\,dx$ donde $f(x) = \begin{cases} 4x^2 & \text{si } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ 2x & \text{si } \frac{1}{2} \le x \le 2 \end{cases}$

44. Evalúe $\left(\int_1^3 x\,dx\right)^3 - \int_1^3 x^3\,dx$.

45. Suponga que $f(x) = \int_1^x 3\frac{1}{t^2}\,dt$. Evalúe $\int_e^1 f(x)\,dx$.

**46.** Evalúe $\int_7^7 e^{x^2}\,dx + \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{3\sqrt{2}}\,dx$.

**47.** Si $\int_1^3 f(x)\,dx = 4$ y $\int_3^2 f(x)\,dx = 3$, encuentre $\int_1^2 f(x)\,dx$.

**48.** Si $\int_1^4 f(x)\,dx = 6$, $\int_2^4 f(x)\,dx = 5$ y $\int_1^3 f(x)\,dx = 2$, encuentre $\int_2^3 f(x)\,dx$.

**49.** Evalúe $\int_2^3 \left(\frac{d}{dx}\int_2^3 e^{x^3}\,dx\right)dx$. (*Una pista*: No es necesario determinar $\int_2^3 e^{x^3}\,dx$.)

**50.** Suponga que $f(x) = \int_e^x \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}\,dt$, donde $x > e$. Encuentre $f'(x)$.

**51. Índice de severidad** En un análisis de la seguridad en el tráfico, Shonle[8] considera cuánta aceleración puede tolerar una persona en un choque sin que sufra lesiones serias. El *índice de severidad* se define como

$$\text{S.I.} = \int_0^T \alpha^{5/2}\,dt$$

donde $\alpha$ (la letra griega "alfa") se considera una constante implicada con la aceleración media ponderada y $T$ es la duración del choque. Encuentre el índice de severidad.

**52. Estadística** En estadística, la media $\mu$ (letra griega "my") de la función $f$ de densidad de probabilidad continua, definida en el intervalo $[a, b]$ está dada por

$$\mu = \int_a^b [x \cdot f(x)]\,dx$$

y la varianza $\sigma^2$ (letra griega "sigma") está dada por

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

Calcule $\mu$ y después $\sigma^2$ si $a = 0$, $b = 1$ y $f(x) = 1$.

**53. Distribución de ingresos** El economista Pareto[9] ha establecido una ley empírica de distribución de ingresos superiores, que proporciona el número $N$ de personas que reciben $x$ o más dólares. Si

$$\frac{dN}{dx} = -Ax^{-B}$$

donde $A$ y $B$ son constantes, obtenga una integral definida que dé el número total de personas con ingresos entre $a$ y $b$, donde $a < b$.

**54. Biología** En un estudio sobre mutación genética,[10] aparece la integral siguiente:

$$\int_0^{10^{-4}} x^{-1/2}\,dx$$

Evalúe esta integral.

**55. Flujo continuo de ingreso** El valor presente (en dólares) de un flujo continuo de ingreso de \$2000 al año durante cinco años al 6% compuesto continuamente está dado por

$$\int_0^5 2000e^{-0.06t}\,dt$$

Evalúe el valor presente, al dólar más cercano.

**56. Biología** En biología, con frecuencia surgen problemas que implican la transferencia de una sustancia entre compartimentos. Un ejemplo sería la transferencia del flujo sanguíneo a los tejidos. Evalúe la siguiente integral que se presenta en un problema de difusión entre dos compartimentos:[11]

$$\int_0^t (e^{-a\tau} - e^{-b\tau})\,d\tau$$

aquí, $\tau$ (se lee "tau") es una letra griega; $a$ y $b$ son constantes.

**57. Demografía** Para cierta población, suponga que $l$ es una función tal que $l(x)$ es el número de personas que alcanzan la edad $x$ en cualquier año. Esta función se llama *función de la tabla de vida*. Bajo condiciones apropiadas, la integral

$$\int_x^{x+n} l(t)\,dt$$

proporciona el número esperado de personas en la población que tiene entre $x$ y $x + n$ años, inclusive. Si

$$l(x) = 10\,000\sqrt{100 - x}$$

determine el número de personas que tienen exactamente entre 36 y 64 años, inclusive. Dé su respuesta al entero más cercano, puesto que la respuestas fraccionarias no tienen sentido.

**58. Consumo de mineral** Si $C$ es el consumo anual de un mineral en el tiempo $t = 0$, entonces bajo consumo continuo, la cantidad total de mineral usado en el intervalo $[0, t]$ es

$$\int_0^t Ce^{k\tau}\,d\tau$$

donde $k$ es la razón de consumo. Para un mineral de tierras raras se ha determinado que $C = 3000$ unidades y $k = 0.05$. Evalúe la integral para estos datos.

***59. Costo marginal** La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = 0.2q + 8$$

Si $c$ está en dólares, determine el costo de incrementar la producción de 65 a 75 unidades.

**60. Costo marginal** Repita el problema 59 si

$$\frac{dc}{dq} = 0.004q^2 - 0.5q + 50$$

y la producción aumenta de 90 a 180 unidades.

[8] J. I. Shonle, *Environmental Applications of General Physics* (Reading, MA: Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1975).

[9] G. Tintner, *Methodology of Mathematical Economics and Econometrics* (Chicago: University of Chicago Press, 1967), p. 16.

[10] W. J. Ewens, *Population Genetics* (Londres: Methuen & Company Ltd., 1969).

[11] W. Simon, *Mathematical Techniques for Physiology and Medicine* (Nueva York: Academic Press, Inc., 1972).

**61. Ingreso marginal** La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = \frac{2000}{\sqrt{300q}}$$

Si $r$ está en dólares, encuentre el cambio en el ingreso total del fabricante si la producción aumenta de 500 a 800 unidades.

**62. Ingreso marginal** Repita el problema 61 si

$$\frac{dr}{dq} = 250 + 90q - 3q^2$$

y la producción crece de 10 a 20 unidades.

**63. Tasa de criminalidad** Una socióloga estudia la tasa de crímenes en cierta ciudad. Estima que $t$ meses después del principio del próximo año, el número total de crímenes cometidos se incrementará a razón de $8t + 10$ crímenes por mes. Determine el número total de crímenes que se esperan el próximo año. ¿Cuántos crímenes puede esperarse que se cometan durante los últimos 6 meses de ese año?

**64. Altas de hospital** Para un grupo de individuos hospitalizados, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = \frac{81 \times 10^6}{(300 + t)^4}$$

donde $f(t)$ es la proporción del grupo dado de alta por día al final de $t$ días. ¿Qué proporción ha sido dada de alta al final de 700 días?

**65. Producción** Imagine un país unidimensional de longitud $2R$. (Vea la figura 14.23.[12]) Suponga que la producción de bienes en este país está distribuida en forma continua de frontera a frontera. Si la cantidad producida cada año por unidad de distancia es $f(x)$, entonces la producción total del país está dada por

$$G = \int_{-R}^{R} f(x)\,dx$$

Evalúe $G$ si $f(x) = i$, donde $i$ es una constante.

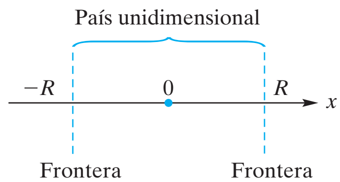



**FIGURA 14.23** Diagrama para el problema 65.

**66. Exportaciones** Para el país unidimensional del problema 65, bajo ciertas condiciones, la cantidad de exportaciones está dada por

$$E = \int_{-R}^{R} \frac{i}{2}[e^{-k(R-x)} + e^{-k(R+x)}]\,dx$$

donde $i$ y $k$ son constantes ($k \neq 0$). Evalúe $E$.

**67. Precio promedio de entrega** En un análisis del precio de entrega de un artículo desde la fábrica hasta el cliente, DeCanio[13] afirma que el precio promedio de entrega pagado por los consumidores está dado por

$$A = \frac{\displaystyle\int_0^R (m + x)[1 - (m + x)]\,dx}{\displaystyle\int_0^R [1 - (m + x)]\,dx}$$

donde $m$ es el precio en la fábrica y $x$ la distancia máxima al punto de venta. DeCanio determina que

$$A = \frac{m + \frac{R}{2} - m^2 - mR - \frac{R^2}{3}}{1 - m - \frac{R}{2}}$$

Verifíquelo.

*En los problemas 68 a 70, use el teorema fundamental del cálculo integral para determinar el valor de la integral definida. Verifique los resultados con su calculadora.*

**68.** $\displaystyle\int_{2.5}^{3.5} (1 + 2x + 3x^2)\,dx$

**69.** $\displaystyle\int_0^4 \frac{1}{(4x + 4)^2}\,dx$

**70.** $\displaystyle\int_0^1 e^{3t}\,dt.$ Redondee su respuesta a dos decimales.

*En los problemas 71 a 74, estime el valor de la integral definida. Redondee sus respuestas a dos decimales.*

**71.** $\displaystyle\int_{-1}^{5} \frac{x^2 + 1}{x^2 + 4}\,dx$

**72.** $\displaystyle\int_3^4 \frac{1}{x \ln x}\,dx$

**73.** $\displaystyle\int_0^3 2\sqrt{t^2 + 3}\,dt$

**74.** $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{6\sqrt{q + 1}}{q + 3}\,dq$

**OBJETIVO**

Estimar el valor de una integral definida con la regla del trapecio o la regla de Simpson.

## 14.8 Integración aproximada

### Regla del trapecio

Cualquier función $f$ construida con polinomios, exponenciales y logaritmos puede diferenciarse mediante el uso de operaciones y composiciones algebraicas y la función resultante $f'$ será también del mismo tipo, una función que puede construirse a partir de polinomios, exponenciales y logaritmos con el uso de operaciones y composiciones algebraicas. Tales funciones pueden llamarse *elementales* (aunque el término tiene usual-

[12]R. Taagepera, "Why the Trade/GNP Ratio Decrease with Country Size", *Social Science Research*, 5 (1976), 385-404.

[13]S. J. DeCanio, "Delivered Pricing and Multiple Basing Point Equationilibria: A Reevaluation". *The Quartely Journal of Economics*, XCIX, núm. 2 (1984), 329-349.

mente un significado un poco diferente). En esta terminología, la derivada de una función elemental también es elemental. La integración es más complicada. Si una función elemental $f$ tiene $F$ como una antiderivada, $F$ puede no ser elemental. Dicho de otra manera, incluso para una función que luce muy simple, como $f$, algunas veces resulta imposible encontrar $\int f(x)\,dx$ en términos de las funciones consideradas en este libro. Por ejemplo, no existe una función elemental cuya derivada sea $e^{x^2}$ de manera que no se puede "hacer" la integral $\int e^{x^2}\,dx$.

Por otra parte, considere una función $f$ que es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ donde $f(x) \geq 0$ para toda $x$ en $[a, b]$. Entonces $\int_a^b f(x)\,dx$ es simplemente el *número* que proporciona el área de la región limitada por las curvas $y = f(x)$, $y = 0$, $x = a$ y $x = b$. Resulta insatisfactorio y quizá impráctico, no decir nada acerca del número $\int_a^b f(x)\,dx$ por la incapacidad de "hacer" la integral $\int f(x)\,dx$. Esto también se aplica cuando la integral $\int f(x)\,dx$ es demasiado difícil para la persona que desea encontrar el número $\int_a^b f(x)\,dx$.

Debido a que $\int_a^b f(x)\,dx$ se define como un límite de sumas de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, cualquier suma particular bien formada de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$ puede verse como una aproximación de $\int_a^b f(x)\,dx$. Al menos para una $f$ no negativa tal suma puede verse como la suma de áreas de rectángulos delgados. Por ejemplo, considere la figura 14.11 de la sección 14.6, en la que se muestran dos rectángulos de manera explícita. Resulta claro que el error que surge de dichos rectángulos se asocia con el pequeño lado superior. El error podría reducirse si se reemplazaran los rectángulos con formas que tuvieran una lado superior más parecido a la forma de la curva. Se considerarán dos posibilidades: el uso de trapecios delgados en lugar de rectángulos, la *regla del trapecio*, y el uso de regiones con lado superior en forma de arcos parabólicos, la *regla de Simpson*. En cada caso, sólo debe conocerse una cantidad finita de valores numéricos de $f(x)$ y los cálculos involucrados son especialmente adecuados para computadoras o calculadoras. En ambos casos se supondrá que $f$ es continua sobre $[a, b]$.

Al desarrollar la regla del trapecio, por conveniencia se supondrá también que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$, para poder pensar en términos de áreas. Básicamente, esta regla implica aproximar la gráfica de $f$ por medio de segmentos de recta.

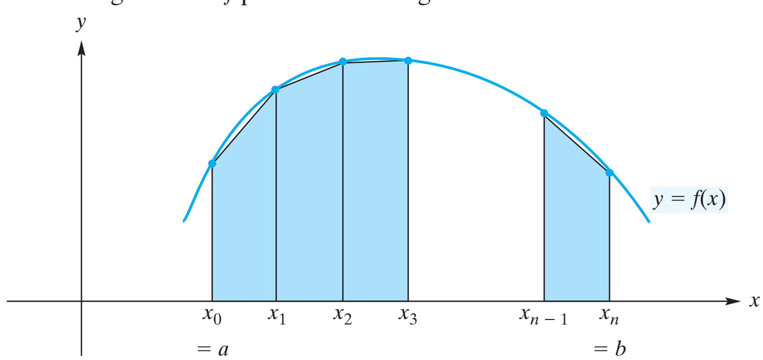



**FIGURA 14.24** Aproximación de un área por medio de trapecios.

En la figura 14.24, el intervalo $[a, b]$ está dividido en $n$ subintervalos de igual longitud por los puntos $a = x_0, x_1, x_2, \ldots$ y $x_n = b$. Como la longitud de $[a, b]$ es $b - a$, la longitud de cada subintervalo es $(b - a)/n$, a la cual se llamará $h$.

Es claro que,

$$x_1 = a + h, x_2 = a + 2h, \ldots, x_n = a + nh = b$$

Es posible asociar un trapecio (figura de cuatro lados, dos de ellos paralelos) con cada subintervalo. El área $A$ de la región limitada por la curva, el eje $x$ y las rectas $x = a$ y $x = b$ es $\int_a^b f(x)\,dx$, la cual puede aproximarse mediante la suma de las áreas de los trapecios determinados por los subintervalos.

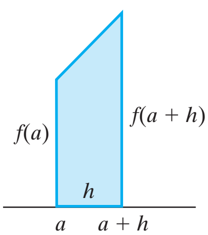



**FIGURA 14.25** Primer trapecio.

Consideremos el primer trapecio, que se dibujó de nuevo en la figura 14.25. Como el área de un trapecio es igual a la mitad de su base multiplicada por la suma de los lados paralelos, este trapecio tiene un área de

$$\tfrac{1}{2}h[f(a) + f(a + h)]$$

En forma similar, el segundo trapecio tiene área

$$\tfrac{1}{2}h[f(a+h)+f(a+2h)]$$

El área $A$ bajo la curva se aproxima mediante la suma de las áreas de $n$ trapecios:

$$\begin{aligned} A \approx\ & \tfrac{1}{2}h[f(a)+f(a+h)]+\tfrac{1}{2}h[f(a+h)+f(a+2h)] \\ & +\tfrac{1}{2}h[f(a+2h)+f(a+3h)]+\cdots+\tfrac{1}{2}h[f(a+(n-1)h)+f(b)] \end{aligned}$$

Como $A = \int_a^b f(x)\,dx$, al simplificar la expresión anterior se obtiene la regla del trapecio:

**Regla del trapecio**

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}[ & f(a)+2f(a+h)+2f(a+2h) \\ & +\cdots+2f(a+(n-1)h)+f(b)] \end{aligned}$$

donde $h = (b-a)/n$.

El patrón de los coeficientes dentro de las llaves es 1, 2, 2, ..., 2, 1. Por lo general, entre más subintervalos se consideren, mejor será la aproximación. En este desarrollo se supuso por conveniencia que $f(x) \geq 0$ en $[a, b]$. Sin embargo, la regla del trapecio es válida sin esta restricción.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 1**

**REGLA DEL TRAPECIO**

De un tanque se derrama aceite a una velocidad de $R'(t) = \dfrac{60}{\sqrt{t^2+9}}$, donde $t$ es el tiempo en minutos y $R(t)$ es el radio de la mancha de aceite, en pies. Use la regla del trapecio, donde $n = 5$ para aproximar $\int_0^5 \dfrac{60}{\sqrt{t^2+9}}\,dt$, el tamaño del radio después de cinco segundos.

### EJEMPLO 1 Regla del trapecio

*Use la regla del trapecio para estimar el valor de*

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

*para $n = 5$. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales.*

**Solución:** Aquí, $f(x) = 1/(1+x^2)$, $n = 5$, $a = 0$ y $b = 1$. Entonces,

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = \frac{1}{5} = 0.2$$

Los términos a sumar son

$$\begin{array}{rcccl} f(a) & = & f(0) & = & 1.0000 \\ 2f(a+h) & = & 2f(0.2) & = & 1.9231 \\ 2f(a+2h) & = & 2f(0.4) & = & 1.7241 \\ 2f(a+3h) & = & 2f(0.6) & = & 1.4706 \\ 2f(a+4h) & = & 2f(0.8) & = & 1.2195 \\ f(b) & = & f(1) & = & \underline{0.5000} \qquad (a+nh=b) \\ & & & & 7.8373 = \text{suma} \end{array}$$

Por lo tanto, la estimación de la integral es

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.2}{2}(7.8373) \approx 0.784$$

El valor real de la integral es aproximadamente 0.785.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## Regla de Simpson

Otro método para estimar $\int_a^b f(x)\,dx$ está dado por la regla de Simpson, que implica aproximar la gráfica de $f$ por medio de segmentos parabólicos. Se omitirá su deducción.

**Regla de Simpson**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[f(a) + 4f(a+h) + 2f(a+2h) + \cdots + 4f(a+(n-1)h) + f(b)]$$

donde $h = (b-a)/n$ y $n$ es un número par.

El patrón de coeficientes dentro de las llaves es 1, 4, 2, 4, 2, ..., 2, 4, 1, lo cual requiere que ***n* sea par**. Se usará esta regla para evaluar la integral del ejemplo 1.

**PRINCIPIOS EN PRÁCTICA 2**

**REGLA DE SIMPSON**

Un cultivo de levadura crece a la velocidad de $A'(t) = 0.3e^{0.2t^2}$, donde $t$ es el tiempo en horas y $A(t)$ es la cantidad en gramos. Use la regla de Simpson con $n = 8$ para aproximar $\int_0^4 0.3e^{0.2t^2}\,dt$, la cantidad que creció el cultivo durante las primeras cuatro horas.

## EJEMPLO 2 Regla de Simpson

*Use la regla de Simpson para estimar el valor de* $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx$ *para* $n = 4$. *Calcule cada término con cuatro decimales y redondee la respuesta a tres decimales.*

**Solución:** Aquí $f(x) = 1/(1+x^2)$, $n = 4$, $a = 0$ y $b = 1$. Así, $h = (b-a)/n = 1/4 = 0.25$. Los términos por sumar son:

$$\begin{aligned} f(a) &= \phantom{4}f(0) &&= 1.0000 \\ 4f(a+h) &= 4f(0.25) &&= 3.7647 \\ 2f(a+2h) &= 2f(0.5) &&= 1.6000 \\ 4f(a+3h) &= 4f(0.75) &&= 2.5600 \\ f(b) &= \phantom{4}f(1) &&= \underline{0.5000} \\ & && \phantom{=}\ 9.4247 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por lo tanto, mediante la regla de Simpson,

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,dx \approx \frac{0.25}{3}(9.4247) \approx 0.785$$

Ésta es una mejor aproximación que la que se obtuvo en el ejemplo 1 con la regla del trapecio.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

Tanto la regla de Simpson como la regla del trapecio pueden usarse si sólo se conoce $f(a)$, $f(a+h)$, etcétera; no es necesario conocer $f(x)$ para toda $x$ en $[a, b]$. En el ejemplo 3 se ilustrará lo anterior.

En el ejemplo 3 se estima una integral definida a partir de puntos de datos; no se conoce la función.

## EJEMPLO 3 Demografía

*Una función que se usa a menudo en demografía (el estudio de nacimientos, matrimonios, mortalidad, etcétera, en una comunidad) es la* ***función de la tabla de vida****, denotada por l. En una población con* 100 000 *nacimientos en cualquier año,* $l(x)$ *representa el número de personas que alcanzan la edad x en cualquier año. Por ejemplo, si* $l(20) = 98\,857$, *entonces el número de personas que llegan a los* 20 *años en cualquier año es* 98 857. *Suponga que la función l se aplica a todas las personas nacidas en un intervalo largo de tiempo. Puede demostrarse que en cualquier momento, el número esperado de personas en la población que tienen exactamente entre x y x + m años inclusive, está dado por*

$$\int_x^{x+m} l(t)\,dt$$

*La siguiente tabla proporciona valores de* $l(x)$ *para hombres y mujeres de Estados Unidos.*[14] *Aproxime el número de mujeres en el grupo de* 20 *a* 35 *años de edad con la regla del trapecio con* $n = 3$.

[14] *National Vital Statistics Report*, vol. 48, núm. 18, febrero 7, 2001.

Tabla de vida

| Edad $= x$ | $l(x)$ | | Edad $= x$ | $l(x)$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| | Hombres | Mujeres | | Hombres | Mujeres |
| 0 | 100 000 | 100 000 | 45 | 93 717 | 96 582 |
| 5 | 99 066 | 99 220 | 50 | 91 616 | 95 392 |
| 10 | 98 967 | 99 144 | 55 | 88 646 | 93 562 |
| 15 | 98 834 | 99 059 | 60 | 84 188 | 90 700 |
| 20 | 98 346 | 98 857 | 65 | 77 547 | 86 288 |
| 25 | 97 648 | 98 627 | 70 | 68 375 | 79 926 |
| 30 | 96 970 | 98 350 | 75 | 56 288 | 70 761 |
| 35 | 96 184 | 97 964 | 80 | 42 127 | 58 573 |
| 40 | 95 163 | 97 398 | | | |

**Solución:** Se desea estimar

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt$$

Se tiene $h = \dfrac{b-a}{n} = \dfrac{35-20}{3} = 5$. Los términos que deben sumarse de acuerdo con la regla del trapecio son

$$\begin{aligned} l(20) &= 98\,857 \\ 2l(25) = 2(98\,627) &= 197\,254 \\ 2l(30) = 2(98\,350) &= 196\,700 \\ l(35) &= \underline{97\,964} \\ & \phantom{=}\ 590\,775 = \text{suma} \end{aligned}$$

Por la regla del trapecio,

$$\int_{20}^{35} l(t)\,dt \approx \frac{5}{2}(590\,775) = 1\,476\,937.5$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 17

Existen fórmulas que se usan para determinar la exactitud de las respuestas obtenidas al usar la regla del trapecio o la regla de Simpson, las cuales pueden encontrarse en textos comunes sobre análisis numérico.

## Problemas 14.8

*En los ejercicios 1 y 2, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n para estimar la integral.*

*1. $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla del trapecio, $n = 6$

**2.** $\displaystyle\int_{-2}^{4} \frac{170}{1+x^2}\,dx$; regla de Simpson, $n = 6$

*En los problemas 3 a 8, use la regla del trapecio o la regla de Simpson (según se indique) y el valor dado de n, para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee su respuesta a tres decimales. En los problemas 3 a 6, evalúe también la integral por antidiferenciación (teorema fundamental del cálculo integral).*

**3.** $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla del trapecio, $n = 5$

**4.** $\displaystyle\int_{0}^{1} x^2\,dx$; regla de Simpson, $n = 4$

*5. $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$

**6.** $\displaystyle\int_{1}^{4} \frac{dx}{x}$; regla del trapecio, $n = 6$

**7.** $\displaystyle\int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{x+1}$; regla del trapecio, $n = 4$

**8.** $\displaystyle\int_{2}^{4} \frac{dx}{x+x^2}$; regla de Simpson, $n = 4$

*En los problemas 9 y 10, use la tabla de vida del ejemplo 3 para estimar las integrales dadas, por medio de la regla del trapecio.*

**9.** $\int_{45}^{70} l(t)\,dt$, hombres, $n = 5$

**10.** $\int_{35}^{55} l(t)\,dt$, mujeres, $n = 4$

*En los problemas 11 y 12, suponga que la gráfica de una función continua f, donde $f(x) \geq 0$, contiene los puntos dados. Use la regla de Simpson y todos los puntos dados para aproximar el área entre la gráfica y el eje x en el intervalo dado. Redondee su respuesta a un decimal.*

**11.** $(1, 0.4), (2, 0.6), (3, 1.2), (4, 0.8), (5, 0.5)$; $[1,5]$

**12.** $(2, 0), (2.5, 6), (3, 10), (3.5, 11), (4, 14), (4.5, 15), (5, 16)$; $[2,5]$

**13.** Con la ayuda de toda la información dada en la figura 14.26, estime $\int_1^3 f(x)\,dx$ por medio de la regla de Simpson. Dé su respuesta en forma fraccionaria.

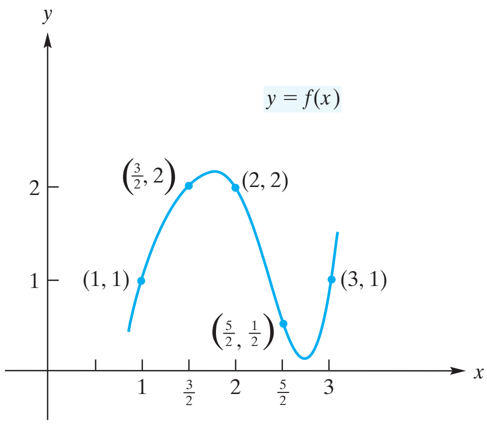



**FIGURA 14.26** Gráfica de $f$ para el problema 13.

*En los problemas 14 y 15, use la regla de Simpson y el valor dado de n para estimar la integral. Calcule cada término con cuatro decimales y redondee sus respuestas a tres decimales.*

**14.** $\int_1^3 \frac{2}{\sqrt{1+x}}\,dx$; $n = 4$ Evalúe también la integral por medio del teorema fundamental del cálculo integral.

**15.** $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$; $n = 4$

**16. Ingreso** Use la regla de Simpson para aproximar el ingreso total recibido por la producción y venta de 80 unidades de un producto, si los valores de la función de ingreso marginal $dr/dq$ son los siguientes:

| $q$ (unidades) | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 | 60 | 70 | 80 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\frac{dr}{dq}$ ($ por unidad) | 10 | 9 | 8.5 | 8 | 8.5 | 7.5 | 7 | 6.5 | 7 |

***17. Área de un lago** Un tramo recto de autopista corre a lo largo de un lago. Un topógrafo que desea conocer el área aproximada del lago, mide la distancia desde varios puntos de la carretera a las orillas cercana y lejana del lago y obtiene los valores que se presentan en la siguiente tabla:

| Distancia a lo largo de la autopista (km) | 0.0 | 0.5 | 1.0 | 1.5 | 2.0 | 2.5 | 3.0 | 3.5 | 4.0 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Distancia a la orilla cercana (km) | 0.5 | 0.3 | 0.7 | 1.0 | 0.5 | 0.2 | 0.5 | 0.8 | 1.0 |
| Distancia a la orilla lejana (km) | 0.5 | 2.3 | 2.2 | 3.0 | 2.5 | 2.2 | 1.5 | 1.3 | 1.0 |

Trace un bosquejo de la situación geográfica. Luego use la regla de Simpson para estimar la mejor aproximación del área del lago. Dé su respuesta en forma de fracción.

**18. Manufactura** Un fabricante estimó su costo marginal (CM) y su ingreso marginal (IM) para varios niveles de producción ($q$). Dichas estimaciones se muestran en la siguiente tabla:

| $q$ (unidades) | 0 | 20 | 40 | 60 | 80 | 100 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| CM ($ por unidad) | 260 | 250 | 240 | 200 | 240 | 250 |
| IM ($ por unidad) | 410 | 350 | 300 | 250 | 270 | 250 |

**(a)** Con la regla del trapecio, estime los costos totales variables de producción para 100 unidades.

**(b)** Mediante la regla de Simpson, estime el ingreso total en la venta de 100 unidades.

**(c)** Si se supone que la utilidad máxima ocurre cuando IM = CM (esto es, cuando $q = 100$), estime la utilidad máxima si los costos fijos son de $2000.

**OBJETIVO**

Utilizar bandas verticales y la integral definida para encontrar el área de la región entre una curva y el eje $x$.

## 14.9 Área

En la sección 14.7 se vio que el área de una región puede encontrarse al evaluar el límite de una suma de la forma $\Sigma f(x)\,\Delta x$, donde $f(x)\,\Delta x$ representa el área de un rectángulo. Este límite es un caso especial de una integral definida, por lo que puede encontrarse fácilmente si se usa el teorema fundamental.

Al usar la integral definida para determinar áreas, conviene hacer un bosquejo de la región implicada. Se considerará el área de la región limitada por $y = f(x)$ y el eje $x$ desde $x = a$ hasta $x = b$, donde $f(x) \geq 0$ sobre $[a, b]$. (Vea la figura 14.27). Para plantear la integral, debe incluirse un rectángulo muestra en el bosquejo, porque el área de la región es un límite de sumas de áreas de rectángulos. Esto no sólo ayuda a entender el proceso de integración, sino que también contribuye a encontrar áreas de regiones más complicadas. Dicho rectángulo (vea la figura 14.27) se llama **elemento vertical de área** (o **franja vertical**). En el diagrama, el ancho del elemento vertical es $\Delta x$. La altura es el

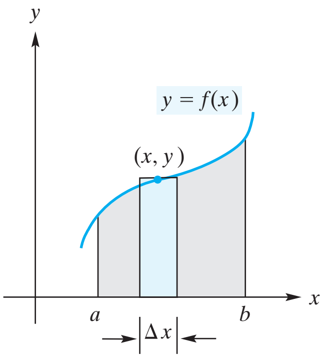


**FIGURA 14.27** Región con elemento vertical.

valor $y$ de la curva. Por lo tanto, el rectángulo tiene un área de $y\ \Delta x$ o $f(x)\ \Delta x$. El área de la región entera se encuentra al sumar las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$, y determinar el límite de esta suma, que es la integral definida. En forma simbólica, se tiene

$$\Sigma f(x)\ \Delta x \to \int_a^b f(x)\,dx = \text{área}$$

En el ejemplo 1 se ilustrará esto.

## EJEMPLO 1 Uso de la integral definida para encontrar un área

*Encuentre el área de la región limitada por la curva*

$$y = 6 - x - x^2$$

*y el eje x.*

**Solución:** Primero se debe bosquejar la curva para poder visualizar la región. Como

$$y = -(x^2 + x - 6) = -(x - 2)(x + 3)$$

las intersecciones con el eje $x$ son $(2, 0)$ y $(-3, 0)$. Con la ayuda de las técnicas de graficación que se vieron antes, se obtiene la gráfica y la región que se muestra en la figura 14.28. *Con esta región es crucial encontrar las intersecciones de la curva con el eje x, porque ellas determinan el intervalo en el cual las áreas de los elementos deben sumarse.* Esto es, *esos valores x son los límites de integración*. El elemento vertical mostrado tiene un ancho $\Delta x$ y altura $y$. Por lo tanto, el área del elemento es $y\ \Delta x$. Al sumar las áreas de todos estos elementos de $x = -3$ a $x = 2$ y tomar el límite mediante la integral definida se obtiene el área:

$$\sum y\ \Delta x \to \int_{-3}^{2} y\,dx = \text{área}$$

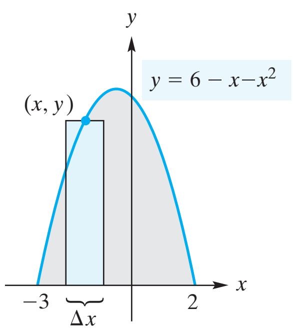


**FIGURA 14.28** Región del ejemplo 1 con elemento vertical.

Para evaluar la integral se debe expresar el integrando en términos de la variable de integración $x$. Como $y = 6 - x - x^2$,

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_{-3}^{2} (6 - x - x^2)\,dx = \left(6x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{2} \\ &= \left(12 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3}\right) - \left(-18 - \frac{9}{2} - \frac{-27}{3}\right) = \frac{125}{6}\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## EJEMPLO 2 Determinación del área de una región

*Encuentre el área de la región limitada por la curva $y = x^2 + 2x + 2$, el eje x y las rectas $x = -2$ y $x = 1$.*

**Solución:** En la figura 14.29 se muestra un bosquejo de la región. Se tiene

$$\begin{aligned}\text{área} &= \int_{-2}^{1} y\,dx = \int_{-2}^{1} (x^2 + 2x + 2)\,dx \\ &= \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + 2x\right)\Bigg|_{-2}^{1} = \left(\frac{1}{3} + 1 + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} + 4 - 4\right) \\ &= 6\end{aligned}$$

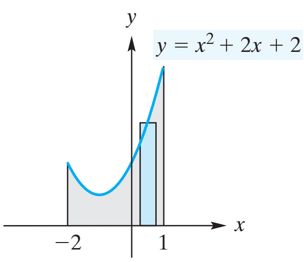


**FIGURA 14.29** Diagrama para el ejemplo 2.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 7

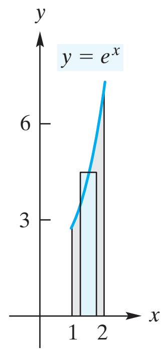



FIGURA 14.30 Diagrama para el ejemplo 3.

## EJEMPLO 3 Determinación del área de una región

*Encuentre el área de la región entre la curva $y = e^x$ y el eje $x$ entre $x = 1$ y $x = 2$.*

**Solución:** En la figura 14.30 se muestra un bosquejo de la región. Se escribe

$$\text{área} = \int_1^2 y\,dx = \int_1^2 e^x\,dx = e^x\Big|_1^2$$
$$= e^2 - e = e(e-1)$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 27

## EJEMPLO 4 Un área que requiere dos integrales definidas

*Encuentre el área de la región limitada por la curva*

$$y = x^2 - x - 2$$

*y la recta $y = 0$ (el eje $x$) entre $x = -2$ y $x = 2$.*

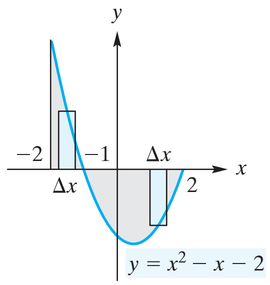



FIGURA 14.31 Diagrama para el ejemplo 4.

**Solución:** En la figura 14.31 se muestra un bosquejo de la región. Note que las intersecciones con el eje $x$ son $(-1, 0)$ y $(2, 0)$.

En el intervalo $[-2, -1]$, el área del elemento es

$$y\,\Delta x = (x^2 - x - 2)\,\Delta x$$

En $[-1, 2]$ el área es

$$-y\,\Delta x = -(x^2 - x - 2)\,\Delta x$$

Así,

$$\text{área} = \int_{-2}^{-1} (x^2 - x - 2)\,dx + \int_{-1}^{2} -(x^2 - x - 2)\,dx$$
$$= \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-2}^{-1} - \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x\right)\Bigg|_{-1}^{2}$$
$$= \left[\left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right) - \left(-\frac{8}{3} - \frac{4}{2} + 4\right)\right]$$
$$- \left[\left(\frac{8}{3} - \frac{4}{2} - 4\right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2\right)\right]$$
$$= \frac{19}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 31

**ADVERTENCIA**

Es erróneo apresurarse y escribir que el área es $\int_{-2}^{2} y\,dx$, por la siguiente razón. Para el rectángulo izquierdo la altura es $y$. Sin embargo, para el rectángulo a la derecha, la $y$ es negativa, por lo que su altura es el número positivo $-y$. Esto señala la importancia de bosquejar la región.

En el ejemplo siguiente se muestra el uso del área como una probabilidad en estadística.

## EJEMPLO 5 Aplicación a la estadística

*En estadística, una **función de densidad** (de probabilidad) $f$ de una variable $x$, donde $x$ toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, tiene las siguientes propiedades:*

**(i)** $f(x) \geq 0$

**(ii)** $\int_a^b f(x)\,dx = 1$

*La probabilidad de que $x$ tome un valor entre $c$ y $d$, que se escribe $P(c \leq x \leq d)$, donde $a \leq c \leq d \leq b$, se representa mediante el área de la región limitada por la gráfica de $f$ y el eje $x$ entre $x = c$ y $x = d$. Por lo tanto* (vea la figura 14.32),

$$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)\,dx$$

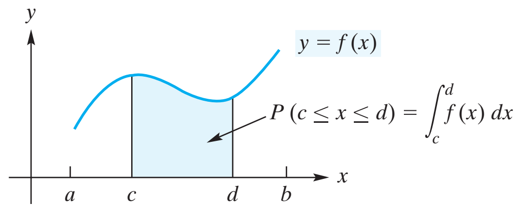



**FIGURA 14.32** Probabilidad como un área.

*Para la función de densidad $f(x) = 6(x - x^2)$, donde $0 \le x \le 1$, encuentre cada una de las siguientes probabilidades.*

**a.** $P(0 \le x \le \frac{1}{4})$

**Solución:** Aquí $[a, b]$ es $[0, 1]$, $c$ es 0 y $d$ es $\frac{1}{4}$. Se tiene

$$P\left(0 \le x \le \tfrac{1}{4}\right) = \int_0^{1/4} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_0^{1/4} (x - x^2)\,dx$$
$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_0^{1/4} = (3x^2 - 2x^3)\bigg|_0^{1/4}$$
$$= \left(3\left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{4}\right)^3\right) - 0 = \frac{5}{32}$$

**b.** $P(x \ge \frac{1}{2})$.

**Solución:** Como el dominio de $f$ es $0 \le x \le 1$, decir que $x \ge \frac{1}{2}$ significa que $\frac{1}{2} \le x \le 1$. Así,

$$P\left(x \ge \frac{1}{2}\right) = \int_{1/2}^{1} 6(x - x^2)\,dx = 6\int_{1/2}^{1} (x - x^2)\,dx$$
$$= 6\left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)\bigg|_{1/2}^{1} = (3x^2 - 2x^3)\bigg|_{1/2}^{1} = \frac{1}{2}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 37

## Problemas 14.9

*En los problemas 1 a 34, use una integral definida para encontrar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. En cada caso, primero haga el bosquejo de la región. Tenga cuidado con las áreas de las regiones que están debajo del eje x.*

*1. $y = 4x, \quad x = 2$
2. $y = \frac{3}{4}x + 1, \quad x = 0, \quad x = 16$
3. $y = 5x + 2, \quad x = 1, \quad x = 4$
4. $y = x + 5, \quad x = 2, \quad x = 4$
5. $y = x - 1, \quad x = 5$
6. $y = 3x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$
*7. $y = x^2, \quad x = 2, \quad x = 3$
8. $y = 2x^2 - x, \quad x = -2, \quad x = -1$
9. $y = x^2 + 2, \quad x = -1, \quad x = 2$
10. $y = x + x^2 + x^3, \quad x = 1$
11. $y = x^2 - 2x, \quad x = -3, \quad x = -1$
12. $y = 3x^2 - 4x, \quad x = -2, \quad x = -1$
13. $y = 2 - x - x^2$
14. $y = \frac{4}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2$
15. $y = 2 - x - x^3, \quad x = -3, \quad x = 0$
16. $y = e^x, \quad x = 1, \quad x = 3$
17. $y = 3 + 2x - x^2$
18. $y = \frac{1}{(x-1)^2}, \quad x = 2, \quad x = 3$
19. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e$
20. $y = \frac{1}{x}, \quad x = 1, \quad x = e^2$
21. $y = \sqrt{x + 9}, \quad x = -9, \quad x = 0$
22. $y = x^2 - 4x, \quad x = 2, \quad x = 6$
23. $y = \sqrt{2x - 1}, \quad x = 1, \quad x = 5$
24. $y = x^3 + 3x^2, \quad x = -2, \quad x = 2$
25. $y = \sqrt[3]{x}, \quad x = 2$
26. $y = x^2 + 4x - 5, \quad x = -5, \quad x = 1$
*27. $y = e^x + 1, \quad x = 0, \quad x = 1$
28. $y = |x|, \quad x = -2, \quad x = 2$
29. $y = x + \frac{2}{x}, \quad x = 1, \quad x = 2$
30. $y = 4 + 3x - x^2$

*31. $y = x^3, \quad x = -2, \quad x = 4$

32. $y = \sqrt{x-2}, \quad x = 2, \quad x = 6$

33. $y = 2x - x^2, \quad x = 1, \quad x = 3$

34. $y = x^2 + 1, \quad x = 0, \quad x = 4$

35. Dado que

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } 0 \le x < 2 \\ 16 - 2x & \text{si } x \ge 2 \end{cases}$$

determine el área de la región limitada por la gráfica de $y = f(x)$, el eje $x$ y la línea $x = 3$. Incluya un bosquejo de la región.

36. Bajo condiciones de una distribución uniforme continua, (un concepto estadístico) de la proporción de personas con ingresos entre $a$ y $t$, donde $a \le t \le b$, es el área de la región entre la curva $y = 1/(b-a)$ y el eje $x$, desde $x = a$ hasta $x = t$. Bosqueje la gráfica de la curva y determine el área de la región dada.

*37. Suponga que $f(x) = x/8$, donde $0 \le x \le 4$. Si $f$ es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

**(a)** $P(0 \le x \le 1)$
**(b)** $P(2 \le x \le 4)$
**(c)** $P(x \ge 3)$

38. Suponga que $f(x) = \frac{1}{3}(1-x)^2$, donde $0 \le x \le 3$. Si $f$ es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

**(a)** $P(1 \le x \le 2)$
**(b)** $P\left(1 \le x \le \frac{5}{2}\right)$
**(c)** $P(x \le 1)$
**(d)** $P(x \ge 1)$, use el resultado del inciso (c)

39. Suponga que $f(x) = 1/x$, donde $e \le x \le e^2$. Si $f$ es una función de densidad (vea el ejemplo 5), encuentre lo siguiente:

**(a)** $P(3 \le x \le 7)$
**(b)** $P(x \le 5)$
**(c)** $P(x \ge 4)$
**(d)** Verifique que $P(e \le x \le e^2) = 1$

40. **(a)** Sea $r$ un número real, donde $r > 1$. Evalúe

$$\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx$$

**(b)** Su respuesta al inciso (a) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.

**(c)** Evalúe $\lim_{r\to\infty}\left(\int_1^r \frac{1}{x^2}\,dx\right)$.

**(d)** Su respuesta al inciso (c) puede interpretarse como el área de cierta región del plano. Bosqueje esta región.

*En los problemas 41 a 44, use la integración definida para estimar el área de la región limitada por la curva, el eje x y las líneas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.*

41. $y = \dfrac{1}{x^2+1}, \quad x = -2, \quad x = 1$

42. $y = \dfrac{x}{\sqrt{x+5}}, \quad x = 2, \quad x = 7$

43. $y = x^4 - 2x^3 - 2, \quad x = 1, \quad x = 3$

44. $y = 1 + 3x - x^4$

OBJETIVO

Determinar el área de una región acotada por dos o más curvas mediante el uso de franjas verticales u horizontales.

## 14.10 Área entre curvas

### Elementos verticales

Ahora se encontrará el área de una región encerrada por varias curvas. Como antes, el procedimiento consistirá en dibujar un elemento muestra de área y usar la integral definida para "sumar" las áreas de todos los elementos.

Por ejemplo, considere el área de la región en la figura 14.33 que está limitada arriba y abajo por las curvas $y = f(x)$ y $y = g(x)$, y lateralmente por las rectas $x = a$ y $x = b$. El ancho del elemento vertical indicado es $\Delta x$ y la altura es el valor $y$ de la curva superior menos el valor y de la curva inferior, lo que se escribirá como $y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}$. Entonces, el área del elemento es

$$[y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}}]\Delta x$$

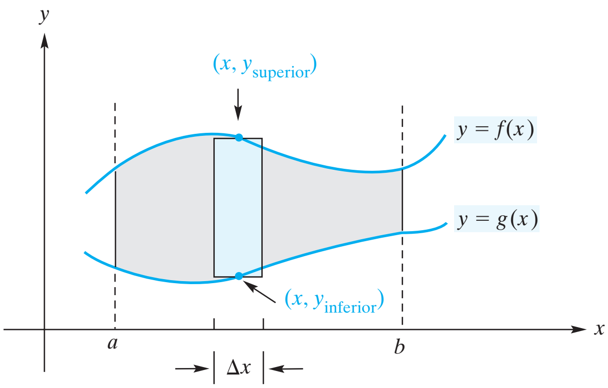



FIGURA 14.33 Región entre curvas.

que es

$$[f(x) - g(x)]\,\Delta x$$

Al sumar las áreas de todos los elementos entre $x = a$ y $x = b$ por medio de la integral definida, se obtiene el área de la región:

$$\sum [f(x) - g(x)]\,\Delta x \to \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx = \text{área.}$$

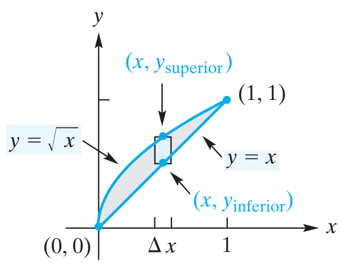



**FIGURA 14.34** Diagrama para el ejemplo 1.

## EJEMPLO 1 Determinación de un área entre dos curvas

*Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = \sqrt{x}$ y $y = x$.*

**Solución:** En la figura 14.34 aparece un bosquejo de la región. Para determinar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema formado por las ecuaciones $y = \sqrt{x}$ y $y = x$. Se elimina $y$ por sustitución, se obtiene

$$\begin{aligned}
\sqrt{x} &= x \\
x &= x^2 && \text{(al elevar al cuadrado ambos lados)} \\
0 &= x^2 - x = x(x-1) \\
x &= 0 \quad \text{o} \quad x = 1
\end{aligned}$$

Debería ser evidente que conocer los puntos de intersección es importante para determinar los límites de la integración.

Como se elevaron ambos lados al cuadrado, se deben verificar las soluciones encontradas con respecto a la ecuación *original*. Se puede determinar con facilidad que tanto $x = 0$ como $x = 1$ son soluciones de $\sqrt{x} = x$. Si $x = 0$, entonces $y = 0$; si $x = 1$, entonces $y = 1$. Así, las curvas se intersecan en $(0, 0)$ y $(1, 1)$. El ancho del elemento del área indicado es $\Delta x$. La altura es el valor $y$ de la curva superior menos el valor $y$ de la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = \sqrt{x} - x$$

El área del elemento es entonces $(\sqrt{x} - x)\,\Delta x$. Se suman las áreas de todos estos elementos entre $x = 0$ y $x = 1$ por medio de la integral definida, se obtiene el área de toda la región:

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_0^1 (\sqrt{x} - x)\,dx \\
&= \int_0^1 (x^{1/2} - x)\,dx = \left(\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}} - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^1 \\
&= \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right) - (0 - 0) = \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 9

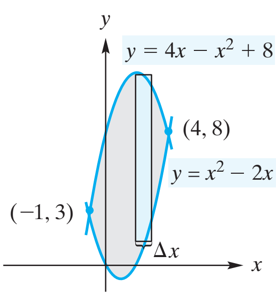



**FIGURA 14.35** Diagrama para el ejemplo 2.

## EJEMPLO 2 Determinación de un área entre dos curvas

*Encuentre el área de la región limitada por las curvas $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$.*

**Solución:** En la figura 14.35 aparece un bosquejo de la región. Para encontrar dónde se intersecan las curvas, se resuelve el sistema de ecuaciones $y = 4x - x^2 + 8$ y $y = x^2 - 2x$:

$$\begin{aligned}
4x - x^2 + 8 &= x^2 - 2x, \\
-2x^2 + 6x + 8 &= 0, \\
x^2 - 3x - 4 &= 0, \\
(x+1)(x-4) &= 0 && \text{(al factorizar)} \\
x = -1 \quad \text{o} \quad x &= 4
\end{aligned}$$

Cuando $x = -1$, $y = 3$; cuando $x = 4$, entonces $y = 8$. Así, las curvas se intersecan en $(-1, 3)$ y $(4, 8)$. El ancho del elemento indicado es $\Delta x$. La altura es el valor $y$ de la curva superior menos el valor $y$ de la curva inferior:

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = (4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)$$

Por lo tanto, el área del elemento es

$$[(4x - x^2 + 8) - (x^2 - 2x)]\,\Delta x = (-2x^2 + 6x + 8)\,\Delta x$$

Al sumar todas estas áreas desde $x = -1$ hasta $x = 4$, se tiene

$$\text{área} = \int_{-1}^{4} (-2x^2 + 6x + 8)\,dx = 41\tfrac{2}{3}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 25

## EJEMPLO 3 Área de una región que tiene dos curvas superiores diferentes

*Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - x^2$ y $y = x^2 + 1$ desde $x = 0$ hasta $x = 3$.*

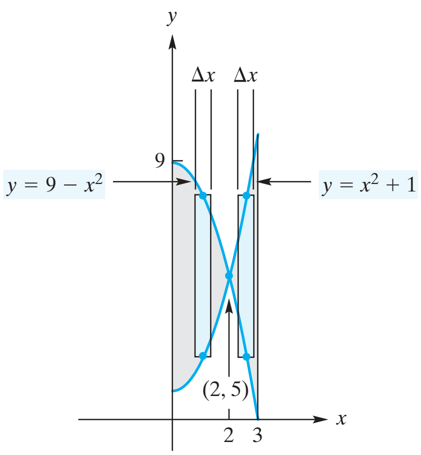



**FIGURA 14.36** $y_{\text{superior}}$ es $9 - x^2$ en $[0, 2]$ y es $x^2 + 1$ en $[2, 3]$.

**Solución:** En la figura 14.36 se muestra un bosquejo de la región. Las curvas se intersecan cuando

$$\begin{aligned} 9 - x^2 &= x^2 + 1 \\ 8 &= 2x^2 \\ 4 &= x^2 \\ x &= \pm 2 \qquad \text{(dos soluciones)} \end{aligned}$$

Cuando $x = \pm 2$, entonces $y = 5$, por lo que los puntos de intersección son $(\pm 2, 5)$. Como se tiene interés en la región desde $x = 0$ hasta $x = 3$, el punto de intersección que importa es $(2, 5)$. Note en la figura 14.36 que en la región a la *izquierda* del punto de intersección $(2, 5)$, un elemento tiene

$$y_{\text{superior}} = 9 - x^2 \quad \text{y} \quad y_{\text{inferior}} = x^2 + 1$$

pero para un elemento a la *derecha* de $(2, 5)$ ocurre lo contrario, a saber

$$y_{\text{superior}} = x^2 + 1 \quad \text{y} \quad y_{\text{inferior}} = 9 - x^2$$

Entonces, desde $x = 0$ hasta $x = 2$, el área de un elemento es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,\Delta x &= [(9 - x^2) - (x^2 + 1)]\,\Delta x \\ &= (8 - 2x^2)\,\Delta x \end{aligned}$$

pero entre $x = 2$ y $x = 3$, es

$$\begin{aligned} (y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}})\,\Delta x &= [(x^2 + 1) - (9 - x^2)]\,\Delta x \\ &= (2x^2 - 8)\,\Delta x \end{aligned}$$

Por lo tanto, para encontrar el área de la región entera se necesitan *dos* integrales:

$$\begin{aligned} \text{área} &= \int_0^2 (8 - 2x^2)\,dx + \int_2^3 (2x^2 - 8)\,dx \\ &= \left(8x - \frac{2x^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 + \left(\frac{2x^3}{3} - 8x\right)\Bigg|_2^3 \\ &= \left[\left(16 - \frac{16}{3}\right) - 0\right] + \left[(18 - 24) - \left(\frac{16}{3} - 16\right)\right] \\ &= \frac{46}{3} \end{aligned}$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 33

## Elementos horizontales

Algunas veces el área puede ser más fácil de determinar si se suman áreas de elementos horizontales en lugar de elementos verticales. En el ejemplo siguiente se determinará el área por ambos métodos. En cada caso, el elemento de área determina la forma de la integral.

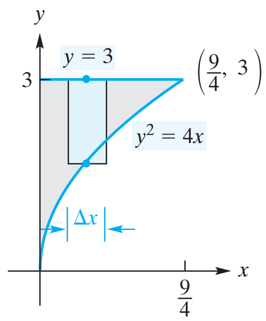



**FIGURA 14.37** Elemento vertical de área.

### EJEMPLO 4 Los métodos de elementos verticales y elementos horizontales

*Encuentre el área de la región limitada para la curva $y^2 = 4x$ y las rectas $y = 3$ y $x = 0$ (el eje y).*

**Solución:** En la figura 14.37 se presenta el bosquejo de la región. Cuando las curvas $y = 3$ y $y^2 = 4x$ se intersecan, $9 = 4x$ por lo que $x = \frac{9}{4}$. Entonces el punto de intersección es $(\frac{9}{4}, 3)$. Como el ancho de la franja vertical es $\Delta x$, se integra con respecto a la variable $x$. De acuerdo con esto, $y_{\text{superior}}$ y $y_{\text{inferior}}$ deben expresarse como funciones de $x$. Para la curva inferior $y^2 = 4x$ se tiene $y = \pm 2\sqrt{x}$. Pero $y \geq 0$ para la porción de esta curva que limita la región, por lo que se usa $y = 2\sqrt{x}$. La curva superior es $y = 3$. Por consiguiente, la altura de la franja es

$$y_{\text{superior}} - y_{\text{inferior}} = 3 - 2\sqrt{x}$$

Por consiguiente, la franja tiene un área de $(3 - 2\sqrt{x})\,\Delta x$ y se desea sumar todas estas áreas desde $x = 0$ hasta $x = \frac{9}{4}$. Se tiene

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_0^{9/4} (3 - 2\sqrt{x})\,dx = \left(3x - \frac{4x^{3/2}}{3}\right)\bigg|_0^{9/4} \\
&= \left[3\left(\frac{9}{4}\right) - \frac{4}{3}\left(\frac{9}{4}\right)^{3/2}\right] - (0) \\
&= \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left[\left(\frac{9}{4}\right)^{1/2}\right]^3 = \frac{27}{4} - \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

**ADVERTENCIA**

Con elementos horizontales el ancho es $\Delta y$, no $\Delta x$.

Considere ahora este problema desde el punto de vista de un **elemento horizontal de área** (o **franja horizontal**), como se muestra en la figura 14.38. El ancho del elemento es $\Delta y$. La longitud del elemento es *el valor x de la curva más a la derecha menos el valor x de la curva más a la izquierda*. Así, el área del elemento es

$$(x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,\Delta y$$

Se desea sumar todas estas áreas desde $y = 0$ hasta $y = 3$:

$$\sum (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,\Delta y \rightarrow \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy$$

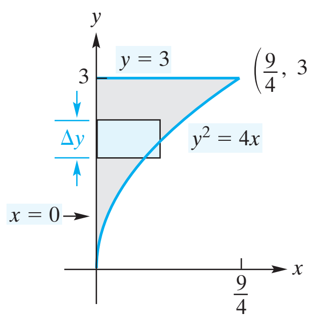



**FIGURA 14.38** Elemento horizontal de área.

Como la variable de integración es $y$, se debe expresar $x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}}$ como funciones de $y$. La curva más a la derecha es $y^2 = 4x$ de manera que $x = y^2/4$. La curva izquierda es $x = 0$. Así,

$$\begin{aligned}
\text{área} &= \int_0^3 (x_{\text{derecha}} - x_{\text{izquierda}})\,dy \\
&= \int_0^3 \left(\frac{y^2}{4} - 0\right) dy = \frac{y^3}{12}\bigg|_0^3 = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

Note que para esta región, las franjas horizontales hacen más fácil la evaluación (y el planteamiento) de la integral definida que una integral con franjas verticales. En todo caso, recuerde que **los límites de integración son los límites para la variable de integración**.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 23

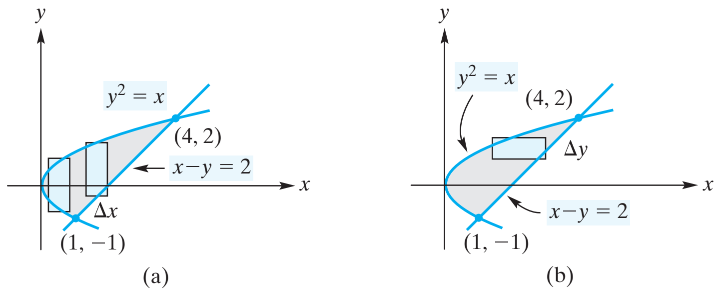



**FIGURA 14.39** Región del ejemplo 5 con elementos verticales y horizontales.

## EJEMPLO 5 Ventajas de los elementos horizontales

*Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y^2 = x$ y $x - y = 2$.*

**Solución:** En la figura 14.39 se muestra el bosquejo de la región. Las curvas se intersecan cuando $y^2 - y = 2$. Así, $y^2 - y - 2 = 0$; en forma equivalente, $(y + 1)(y - 2) = 0$, de donde se deduce que $y = -1$ o $y = 2$. Esto da los puntos de intersección $(1, -1)$ y $(4, 2)$. Considere elementos verticales de área. (Vea la figura 14.39(a)). Se despeja $y$ de $y^2 = x$ se obtiene $y = \pm\sqrt{x}$. Como se ve en la figura 14.39(a), a la *izquierda* de $x = 1$, el extremo superior del elemento se encuentra sobre $y = \sqrt{x}$ y el extremo inferior sobre $y = -\sqrt{x}$. A la *derecha* de $x = 1$, la curva superior es $y = \sqrt{x}$ y la curva inferior es $x - y = 2$ (o $y = x - 2$). Entonces, con franjas verticales son necesarias *dos* integrales para evaluar el área:

$$\text{área} = \int_0^1 (\sqrt{x} - (-\sqrt{x}))\,dx + \int_1^4 (\sqrt{x} - (x-2))\,dx$$

Quizá el uso de franjas horizontales pueda simplificar el trabajo. En la figura 14.39(b), el ancho de la franja es $\Delta y$. La curva más a la derecha *siempre* es $x - y = 2$ (o $x = y + 2$) y la curva más a la izquierda siempre es $y^2 = x$ (o $x = y^2$). Por lo tanto, el área de la franja horizontal es $[(y + 2) - y^2]\Delta y$, por lo que el área total es

$$\text{área} = \int_{-1}^{2} (y + 2 - y^2)\,dy = \frac{9}{2}$$

Resulta claro que usar franjas horizontales es la manera más conveniente de atacar este problema. Así sólo se requiere una integral que es además mucho más sencilla de calcular.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 19

## TECNOLOGÍA

**Problema:** Estime el área de la región limitada por las gráficas de

$$y = x^4 - 2x^3 - 2 \quad \text{y} \quad y = 1 + 2x - 2x^2$$

**Solución:** Con una calculadora TI-83 Plus, se introduce $x^4 - 2x^3 - 2$ como $Y_1$ y $1 + 2x - 2x^2$ como $Y_2$ y se despliegan sus gráficas. La región que importa se muestra sombreada en la figura 14.40; $y_{\text{superior}}$ corresponde a $Y_2$ y $y_{\text{inferior}}$ a $Y_1$. Con las franjas verticales se tiene

$$\text{área} = \int_A^B (Y_2 - Y_1)\,dx$$

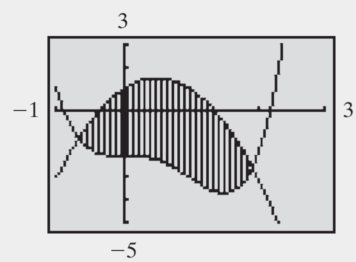



**FIGURA 14.40** Gráficas de $Y_1(y_{\text{inferior}})$ y $Y_2(y_{\text{superior}})$

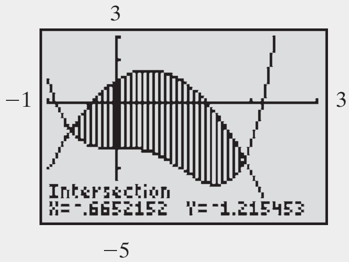



**FIGURA 14.41** Punto de intersección en el cuadrante III.

donde A y B son los valores $x$ de los puntos de intersección en los cuadrantes III y IV, respectivamente. Con la función de intersección se encuentra A, como se indica en la figura 14.41. Este valor de $x$ se almacena en la pantalla como A. (Vea la figura 14.42). De manera similar, se encuentra el valor $x$ del punto de intersección en el cuadrante IV, que se almacena como B. Con el comando fnInt( (figura 14.42), se estima que el área de la región es de 7.54 unidades cuadradas.

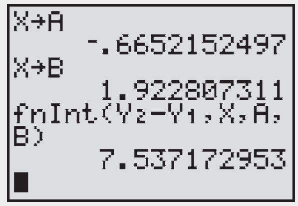



**FIGURA 14.42** Almacenamiento de los valores $x$ de los puntos de intersección y estimación del área.

## Problemas 14.10

*En los problemas 1 a 6, exprese el área de la región sombreada en términos de una integral (o integrales). No evalúe su expresión.*

**1.** Vea la figura 14.43.

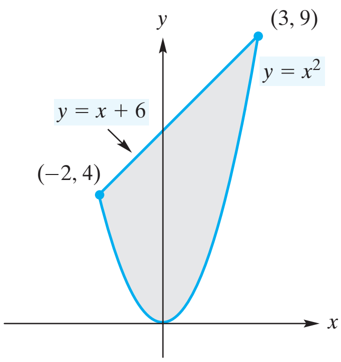



**FIGURA 14.43** Región para el problema 1.

**2.** Vea la figura 14.44.

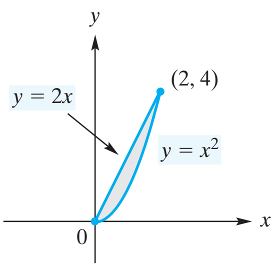



**FIGURA 14.44** Región para el problema 2.

**3.** Vea la figura 14.45.

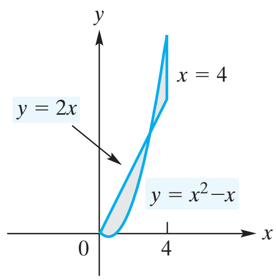



**FIGURA 14.45** Región para el problema 3.

**4.** Vea la figura 14.46.

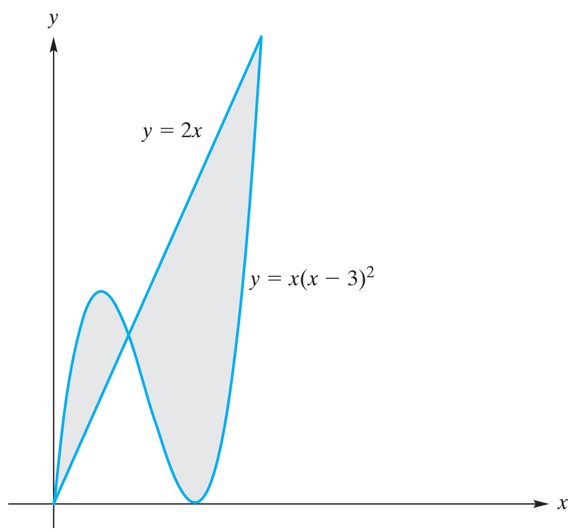



**FIGURA 14.46** Región para el problema 4.

**5.** Vea la figura 14.47.

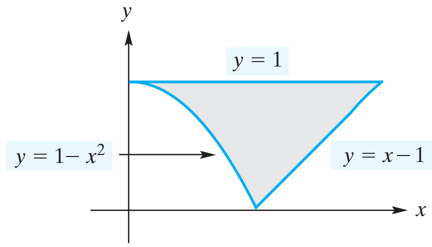



**FIGURA 14.47** Región para el problema 5.

**6.** Vea la figura 14.48.

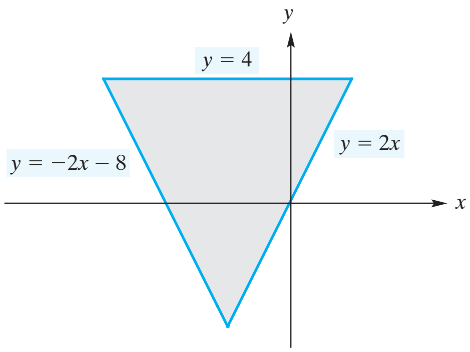



**FIGURA 14.48** Región para el problema 6.

**7.** Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región a la izquierda de la recta $x = 1$, que se encuentra entre las curvas $y = x^2 - 5$ y $y = 7 - 2x^2$. *No* evalúe la integral.

**8.** Exprese, en términos de una sola integral, el área total de la región en el primer cuadrante, limitada por el eje $x$ y las gráficas de $y^2 = x$ y $2y = 3 - x$. *No* evalúe la integral.

*En los problemas 9 a 32, encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones dadas. Asegúrese de encontrar los puntos de intersección requeridos. Considere si el uso de franjas horizontales hace más sencilla la integral que el uso de franjas verticales.*

***9.** $y = x^2, \quad y = 2x$

**10.** $y = x, \quad y = -x + 3, \quad y = 0$

**11.** $y = x^2 + 1, \quad x \geq 0, \quad x = 0, \quad y = 3$

**12.** $y = x^2 + 1, \quad y = x + 3$

**13.** $y = 10 - x^2, \quad y = 4$

**14.** $y^2 = x + 1, \quad x = 1$

**15.** $x = 8 + 2y, \quad x = 0, \quad y = -1, \quad y = 3$

**16.** $y = x - 6, \quad y^2 = x$

**17.** $y = 4 - x^2, \quad y = -3x$

**18.** $x = y^2 + 2, \quad x = 6$

***19.** $y^2 = 4x, \quad y = 2x - 4$

**20.** $y = x^3, \quad y = x + 6, \quad x = 0.$

(*Una pista*: La única raíz real de $x^3 - x - 6 = 0$ es 2.)

**21.** $2y = 4x - x^2, \quad 2y = x - 4$

**22.** $y = \sqrt{x}, \quad y = x^2$

***23.** $y^2 = 3x, \quad 3x - 2y = 15$

**24.** $y = 2 - x^2, \quad y = x$

***25.** $y = 8 - x^2, \quad y = x^2, \quad x = -1, \quad x = 1$

**26.** $y^2 = 6 - x, \quad 3y = x + 12$

**27.** $y = x^2, \quad y = 2, \quad y = 5$

**28.** $y = x^3 + x, y = 0, x = -1, x = 2$

**29.** $y = x^3 - 1, \quad y = x - 1$

**30.** $y = x^3, \quad y = \sqrt{x}$

**31.** $4x + 4y + 17 = 0, \quad y = \dfrac{1}{x}$

**32.** $y^2 = -x - 2, \quad x - y = 5, \quad y = -1, \quad y = 1$

***33.** Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x - 1 \quad \text{y} \quad y = 5 - 2x$$

desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

**34.** Encuentre el área de la región entre las curvas

$$y = x^2 - 4x + 4 \quad \text{y} \quad y = 10 - x^2$$

desde $x = 2$ hasta $x = 4$.

**35. Curva de Lorenz** La *curva de Lorenz* se utiliza para estudiar las distribuciones de ingresos. Si $x$ es el porcentaje acumulado de receptores de ingresos, ordenados de más pobres a más ricos, y $y$ es el porcentaje acumulado de ingresos, entonces la igualdad de la distribución de ingresos está dada por la recta $y = x$ en la figura 14.49, donde $x$ y $y$ se expresan como decimales. Por ejemplo, 10% de la gente recibe 10% de los ingresos totales, 20% de la gente recibe 20% de los ingresos, etcétera. Suponga que la distribución real está dada por la curva de Lorenz definida por

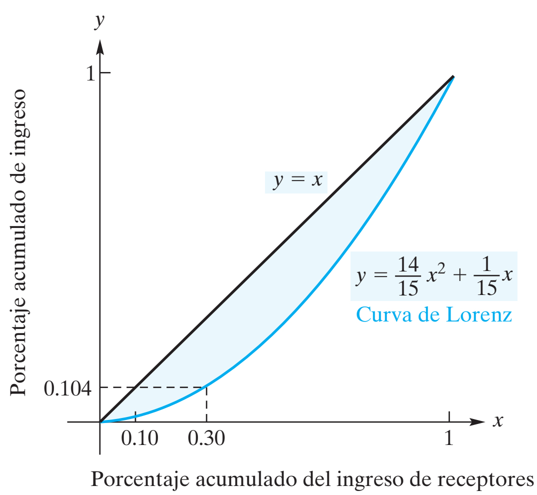



**FIGURA 14.49** Diagrama para el problema 35.

$$y = \frac{14}{15}x^2 + \frac{1}{15}x$$

Observe, por ejemplo, que 30% de la gente sólo recibe 10.4% de los ingresos totales. El grado de desviación de la igualdad se mide por el *coeficiente de desigualdad*[15] para una curva de Lorenz. Este coeficiente se define como el área entre la curva y la diagonal, dividida entre el área bajo la diagonal:

[15]G. Stigler, *The Theory of Price*, 3a. ed. (Nueva York: The Macmillan Company, 1966), pp. 293-294.

$$\frac{\text{área entre la curva y la diagonal}}{\text{área bajo la diagonal}}$$

Por ejemplo, cuando todos los ingresos son iguales, el coeficiente de desigualdad es cero. Encuentre el coeficiente de desigualdad para la curva de Lorenz que se acaba de definir.

**36.** **Curva de Lorenz** Encuentre el coeficiente de desigualdad en el problema 35, para la curva de Lorenz definida por $y = \frac{11}{12}x^2 + \frac{1}{12}x$.

**37.** Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de las ecuaciones $y^2 = 4x$ y $y = mx$, donde $m$ es una constante positiva.

**38.** **(a)** Encuentre el área de la región limitada por las gráficas de $y = x^2 - 1$ y $y = 2x + 2$.

**(b)** ¿Qué porcentaje del área en la parte (a) se encuentra arriba del eje $x$?

**39.** La región limitada por la curva $y = x^2$ y la recta $y = 4$ está dividida en dos partes de igual área por la recta $y = k$, donde $k$ es una constante. Encuentre el valor de $k$.

*En los problemas 40 a 44, estime el área de la región limitada por la gráfica de las ecuaciones dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.*

**40.** $y = x^2 - 4x + 1, \quad y = -\dfrac{6}{x}$

**41.** $y = \sqrt{25 - x^2}, \quad y = 7 - 2x - x^4$

**42.** $y = x^3 - 8x + 1, \quad y = x^2 - 5$

**43.** $y = x^5 - 3x^3 + 2x, \quad y = 3x^2 - 4$

**44.** $y = x^4 - 3x^3 - 15x^2 + 19x + 30, \quad y = x^3 + x^2 - 20x$

## 14.11 Excedentes de los consumidores y de los productores

**OBJETIVO**

Desarrollar los conceptos económicos de excedente de los consumidores y excedente de los productores, los cuales se representan mediante áreas.

La determinación del área de una región tiene aplicaciones en economía. La figura 14.50 muestra una curva de oferta para un producto. La curva indica el precio $p$ por unidad al que un fabricante venderá (o suministrará) $q$ unidades. El diagrama también muestra la curva de demanda para el producto. Esta curva indica el precio por unidad al que los consumidores comprarán (o demandarán) $q$ unidades. El punto $(q_0, p_0)$ en el que las curvas se intersecan se llama *punto de equilibrio*. Aquí, $p_0$ es el precio por unidad al que los consumidores comprarán la misma cantidad $q_0$ de un producto que los productores desean vender a ese precio. De manera breve, $p_0$ es el precio en el que se presenta estabilidad en la relación productor-consumidor.

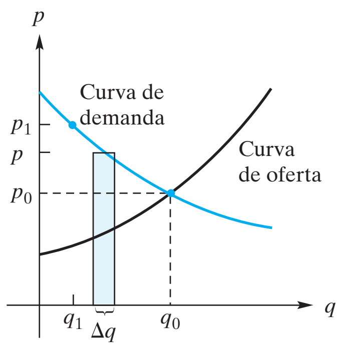



**FIGURA 14.50** Curvas de oferta y demanda.

Suponga que el mercado está en equilibrio y el precio por unidad del producto es $p_0$. De acuerdo con la curva de demanda, hay consumidores que estarían dispuestos a pagar *más* que $p_0$. Por ejemplo, al precio $p_1$ por unidad, los consumidores comprarían $q_1$ unidades. Estos consumidores están beneficiándose del menor precio, inferior al de equilibrio $p_0$.

La franja vertical en la figura 14.50 tiene un área de $p\,\Delta q$. Esta expresión puede también considerarse como la cantidad total de dinero que los consumidores gastarían al comprar $\Delta q$ unidades de producto, si el precio por unidad fuese $p$. Como el precio es en realidad $p_0$, esos consumidores sólo gastan $p_0 \Delta q$ en esas $\Delta q$ unidades y se benefician así en la cantidad $p\,\Delta q - p_0 \Delta q$. Esta expresión puede escribirse como $(p - p_0)\Delta q$, que es el área de un rectángulo de ancho $\Delta q$ y altura $p - p_0$. (Vea la figura 14.51). Después de sumar las áreas de todos los rectángulos desde $q = 0$ hasta $q = q_0$ mediante la integración definida, se tiene

$$\int_0^{q_0} (p - p_0)\, dq$$

Esta integral, bajo ciertas condiciones, representa la ganancia total de los consumidores que están dispuestos a pagar más que el precio de equilibrio. Esta ganancia total se llama **excedente de los consumidores** y se abrevia EC. Si la función de demanda está dada por $p = f(q)$, entonces

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq$$

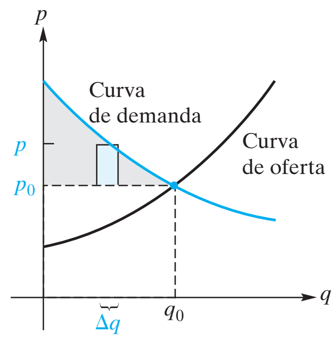



**FIGURA 14.51** Beneficio a los consumidores para $\Delta q$ unidades.

De manera geométrica (vea la figura 14.52), el excedente de los consumidores se representa mediante el área entre la recta $p = p_0$ y la curva de demanda $p = f(q)$ entre $q = 0$ hasta $q = q_0$.

Algunos de los productores también se benefician del precio de equilibrio, puesto que están dispuestos a suministrar el producto a precios menores que $p_0$. Bajo ciertas condiciones, la ganancia total de los productores se representa en forma geométrica en

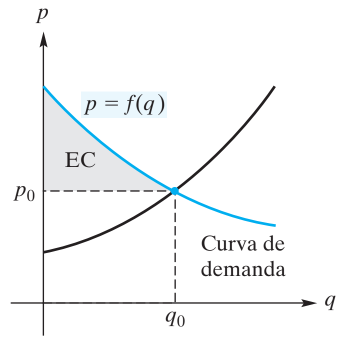



FIGURA 14.52 Excedente de los consumidores.

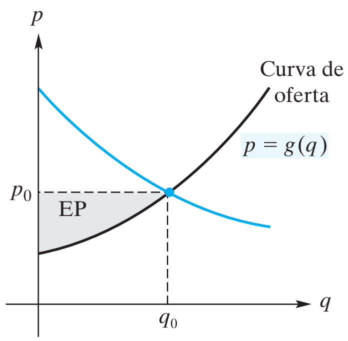



FIGURA 14.53 Excedente de los productores.

la figura 14.53, mediante el área entre la recta $p = p_0$, y la curva de oferta $p = g(q)$ desde $q = 0$ hasta $q = q_0$. Esta ganancia, llamada **excedente de los productores**, y abreviada EP, está dada por

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq$$

## EJEMPLO 1 Determinación del excedente de los consumidores y de los productores

*La función de demanda para un producto es*

$$p = f(q) = 100 - 0.05q$$

*donde p es el precio por unidad (en dólares) para q unidades. La función de oferta es*

$$p = g(q) = 10 + 0.1q$$

*Determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.*

**Solución:** Primero se debe encontrar el punto de equilibrio $(p_0, q_0)$ al resolver el sistema formado por las funciones $p = 100 - 0.05q$ y $p = 10 + 0.1q$. Se igualan las dos expresiones para $p$ y se resuelve:

$$\begin{aligned} 10 + 0.1q &= 100 - 0.05q \\ 0.15q &= 90 \\ q &= 600 \end{aligned}$$

Cuando $q = 600$, entonces $p = 10 + 0.1(600) = 70$. Así, $q_0 = 600$ y $p_0 = 70$. El excedente de los consumidores es

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\, dq = \int_0^{600} (100 - 0.05q - 70)\, dq \\ &= \left(30q - 0.05\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 9000 \end{aligned}$$

El excedente de los productores es

$$\begin{aligned} \text{EP} &= \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\, dq = \int_0^{600} [70 - (10 + 0.1q)]\, dq \\ &= \left(60q - 0.1\frac{q^2}{2}\right)\Bigg|_0^{600} = 18\,000 \end{aligned}$$

Por lo tanto, el excedente de los consumidores es de \$9000 y el de los productores es de \$18 000.

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 1

## EJEMPLO 2 Uso de franjas horizontales para encontrar el excedente de los consumidores y de los productores

*La ecuación de demanda para un producto es*

$$q = f(p) = \frac{90}{p} - 2$$

*y la ecuación de oferta es $q = g(p) = p - 1$. Determine el excedente de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.*

**Solución:** Para determinar el punto de equilibrio, se tiene

$$\begin{aligned} p - 1 &= \frac{90}{p} - 2 \\ p^2 + p - 90 &= 0 \\ (p + 10)(p - 9) &= 0 \end{aligned}$$

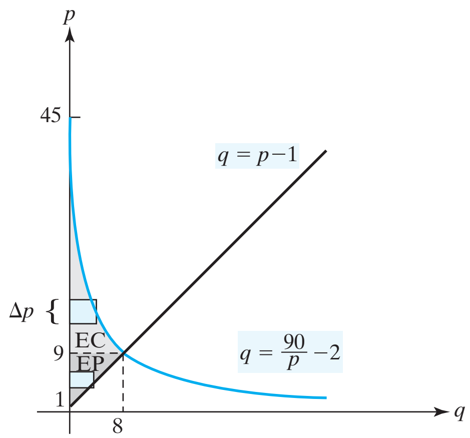



**FIGURA 14.54** Diagrama para el ejemplo 2.

Así, $p_0 = 9$, por lo que $q_0 = 9 - 1 = 8$. (Vea la figura 14.54). Observe que la ecuación de demanda expresa a $q$ como una función de $p$. Como el excedente de los consumidores puede considerarse como un área, esta área puede determinarse por medio de franjas horizontales de ancho $\Delta p$ y la longitud $q = f(p)$. Las áreas de estas franjas se suman desde $p = 9$ hasta $p = 45$, mediante la integración con respecto a $p$:

$$\begin{aligned} \text{EC} &= \int_9^{45} \left(\frac{90}{p} - 2\right) dp = (90 \ln |p| - 2p)\Big|_9^{45} \\ &= 90 \ln 5 - 72 \approx 72.85 \end{aligned}$$

Con franjas horizontales para el excedente de los productores, se tiene

$$\text{EP} = \int_1^9 (p - 1)\, dp = \frac{(p-1)^2}{2}\Big|_1^9 = 32$$

AHORA RESUELVA EL PROBLEMA 5

# Problemas 14.11

*En los problemas 1 a 6, la primera ecuación es una ecuación de demanda y la segunda es una ecuación de oferta de un producto. En cada caso, determine el excedente de los consumidores y de los productores, bajo equilibrio del mercado.*

*1. $p = 22 - 0.8q$
$p = 6 + 1.2q$

2. $p = 2200 - q^2$
$p = 400 + q^2$

3. $p = \dfrac{50}{q+5}$
$p = \dfrac{q}{10} + 4.5$

4. $p = 400 - q^2$
$p = 20q + 100$

*5. $q = 100(10 - 2p)$
$q = 50(2p - 1)$

6. $q = \sqrt{100 - p}$
$q = \dfrac{p}{2} - 10$

7. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 10\sqrt{100 - p}$$

Calcule el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado, que ocurre a un precio de \$84.

8. La ecuación de demanda de un producto es

$$q = 400 - p^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = \frac{q}{60} + 5$$

Encuentre el excedente de los productores y de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

9. La ecuación de demanda para un producto es $p = 2^{11-q}$, y la ecuación de oferta es $p = 2^{q+1}$, donde $p$ es el precio por unidad (en cientos de dólares) cuando se demandan o se ofrecen $q$ unidades. Determine el excedente de los consumidores, al millar de unidades más cercano, bajo equilibrio del mercado.

10. La ecuación de demanda para un producto es

$$(p + 10)(q + 20) = 1000$$

y la ecuación de oferta es

$$q - 4p + 10 = 0$$

**(a)** Verifique, por sustitución, que el equilibrio del mercado ocurre cuando $p = 10$ y $q = 30$.

**(b)** Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

**11.** La ecuación de demanda para un producto es

$$p = 60 - \frac{50q}{\sqrt{q^2 + 3600}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 10\ln(q + 20) - 26$$

Determine el excedente de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

**12. Excedente de los productores** La función de oferta para un producto está dada por la siguiente tabla, donde $p$ es el precio por unidad (en dólares) en el cual se suministran $q$ unidades al mercado:

| $q$ | 0 | 10 | 20 | 30 | 40 | 50 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $p$ | 25 | 49 | 59 | 71 | 80 | 94 |

Use la regla del trapecio para estimar el excedente de los productores si el precio de venta es \$80.

# 14.12 Repaso

## Términos y símbolos importantes

| | | Ejemplos |
|---|---|---|
| Sección 14.1 | **Diferenciales** | |
| | diferencial, $dy$, $dx$ | Ej. 1, p. 619 |
| Sección 14.2 | **La integral indefinida** | |
| | antiderivada integral indefinida $\int f(x)\,dx$ signo de integral | Ej. 1, p. 625 |
| | integrando variable de integración constante de integración | Ej. 2, p. 625 |
| Sección 14.3 | **Integración con condiciones iniciales** | |
| | condición inicial | Ej. 1, p. 630 |
| Sección 14.4 | **Más fórmulas de integración** | |
| | regla de la potencia para la integración | Ej. 1, p. 634 |
| Sección 14.5 | **Técnicas de integración** | |
| | división preliminar | Ej. 1, p. 640 |
| Sección 14.6 | **La integral definida** | |
| | integral definida $\int_a^b f(x)\,dx$ límites de integración | Ej. 2, p. 649 |
| Sección 14.7 | **Teorema fundamental del cálculo integral** | |
| | Teorema fundamental del cálculo integral $F(x)\vert_a^b$ | Ej. 1, p. 653 |
| Sección 14.8 | **Integración aproximada** | |
| | regla del trapecio regla de Simpson | Ej. 2, p. 662 |
| Sección 14.9 | **Área** | |
| | elemento vertical de área (franja vertical) | Ej. 1, p. 665 |
| Sección 14.10 | **Áreas entre curvas** | |
| | elemento horizontal de área (franja horizontal) | Ej. 5, p. 672 |
| Sección 14.11 | **Excedentes de los consumidores y de los productores** | |
| | excedente de los consumidores excedente de los productores | Ej. 1, p. 676 |

## Resumen

Si $y = f(x)$ es una función diferenciable de $x$, se define la diferencial $dy$ mediante

$$dy = f'(x)\,dx$$

donde $dx = \Delta x$ es un cambio en $x$ y puede ser cualquier número real. (Así, $dy$ es una función de dos variables, a saber, $x$ y $dx$.) Si $dx$ está cerca de cero, entonces $dy$ es una aproximación a $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

$$\Delta y \approx dy$$

Además, $dy$ puede usarse para aproximar el valor de una función mediante

$$f(x + \Delta x) \approx f(x) + dy$$

Una antiderivada de una función $f$ es una función $F$ tal que $F'(x) = f(x)$. Dos antiderivadas cualesquiera de $f$ difieren cuando mucho en una constante. La antiderivada más general de $f$ se llama integral indefinida de $f$ y se denota $\int f(x)\,dx$. Así,

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

donde $C$ se llama constante de integración, si y sólo si $F' = f$.

Algunas fórmulas básicas de integración son:

$$\int k\,dx = kx + C \qquad k \text{ es una constante}$$

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad n \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x}dx = \ln x + C \qquad \text{para } x > 0$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int kf(x)\,dx = k\int f(x)\,dx \qquad k \text{ es una constante}$$

$$\text{y} \quad \int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$$

Otra fórmula es la regla de la potencia para integración:

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C \qquad \text{si } n \neq -1$$

Aquí, $u$ representa una función diferenciable de $x$ y $du$ es su diferencial. Al aplicar la regla de la potencia a una integral dada, es importante que la integral se escriba de manera que coincida en forma precisa con la de la regla. Otras fórmulas de integración son

$$\int e^u du = e^u + C$$

$$\text{y} \quad \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + C \qquad u \neq 0$$

Si se conoce la razón de cambio de una función $f$, es decir, si $f'$ se conoce, entonces $f$ es una antiderivada de $f'$. Además, si se sabe que $f$ satisface una condición inicial, entonces es posible encontrar la antiderivada particular. Por ejemplo, se da una función de costo marginal $dc/dq$, por integración se puede encontrar la forma general de $c$. Esa forma implica una constante de integración. Sin embargo, si también se dan los costos fijos (esto es, los costos implicados cuando $q = 0$), se podrá determinar el valor de la constante de integración y así encontrar la función de costo particular $c$. De manera similar, si se da una función de ingreso marginal $dr/dq$, entonces por integración y con base en el hecho de que $r = 0$ cuando $q = 0$, es posible determinar la función de ingreso particular $r$. Una vez conocida $r$, puede encontrarse la correspondiente ecuación de demanda con la ecuación $p = r/q$.

En este punto resulta útil revisar la notación de sumatoria de la sección 1.5. Esta notación es particularmente útil en la determinación de áreas. Para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$ [donde $f(x) \geq 0$ y $f$ es continua] y el eje $x$, desde $x = a$ hasta $x = b$, se divide el intervalo $[a, b]$ en $n$ subintervalos de igual longitud $\Delta x$. Si $x_i$ es el extremo derecho de un subintervalo arbitrario, entonces el producto $f(x_i)\Delta x$ es el área de un rectángulo. Si se denota la suma de todas estas áreas de rectángulos para los $n$ subintervalos por $S_n$, entonces el límite de $S_n$ cuando $n \to \infty$ es el área de toda la región:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \text{área}$$

Si se omite la restricción de que $f(x) \geq 0$, el límite anterior se define como la integral definida de $f$ en $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x = \int_a^b f(x)\,dx$$

En vez de evaluar integrales definidas mediante límites, puede usarse el teorema fundamental del cálculo integral. En forma matemática,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

donde $F$ es cualquier antiderivada de $f$.

Algunas propiedades de la integral definida son

$$\int_a^b kf(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx \qquad k \text{ es una constante,}$$

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

y

$$\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$$

Si $f(x) \geq 0$ y es continua en $[a, b]$, entonces la integral definida puede usarse para encontrar el área de la región limitada por $y = f(x)$, el eje $x$, $x = a$ y $x = b$. La integral definida puede usarse también para encontrar áreas de regiones más complicadas. En esos casos conviene dibujar un elemento de área de la región para plantear correctamente la integral definida. En ocasiones conviene considerar elementos verticales y en otras es preferible usar elementos horizontales.

Una aplicación de la determinación de áreas implica el excedente de los consumidores y de los productores. Suponga que el mercado para un producto que está en equilibrio y que $(q_0, p_0)$ es el punto de equilibrio (el punto de intersección de las curvas de demanda y oferta para el producto). El excedente de los consumidores, EC, corresponde al área entre $q = 0$ y $q = q_0$, limitada por arriba por la curva de demanda y abajo por la recta $p = p_0$. Así,

$$\text{EC} = \int_0^{q_0} [f(q) - p_0]\,dq$$

donde $f$ es la función de demanda. El excedente de los productores, EP, corresponde al área, desde $q = 0$ hasta $q = q_0$, limitada por arriba por la recta $p = p_0$ y abajo por la curva de oferta. Por lo tanto,

$$\text{EP} = \int_0^{q_0} [p_0 - g(q)]\,dq$$

donde $g$ es la función de oferta.

## Problemas de repaso

*Se sugiere utilizar los problemas cuyo número se muestra en color azul, como examen de práctica del capítulo.*

*Determine las integrales en los problemas 1 a 40.*

**1.** $\int (x^3 + 2x - 7)\,dx$

**2.** $\int dx$

**3.** $\int_0^8 (\sqrt{2x} + 2x)\,dx$

**4.** $\int \frac{4}{5 - 3x}\,dx$

**5.** $\int \frac{6}{(x+5)^3}\,dx$

**6.** $\int_3^9 (y-6)^{301}\,dy$

**7.** $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1}\,dx$

**8.** $\int_0^2 xe^{4-x^2}\,dx$

**9.** $\int_0^1 \sqrt[3]{3t+8}\,dt$

**10.** $\int \frac{4-2x}{7}\,dx$

**11.** $\int y(y+1)^2\,dy$

**12.** $\int_0^1 10^{-8}\,dx$

**13.** $\int \frac{\sqrt[5]{t} - \sqrt[3]{t}}{\sqrt{t}}\,dt$

**14.** $\int \frac{(0.5x - 0.1)^4}{0.4}\,dx$

**15.** $\int_1^3 \frac{2t^2}{3 + 2t^3}\,dt$

**16.** $\int \frac{4x^2 - x}{x}\,dx$

**17.** $\int x^2\sqrt{3x^3 + 2}\,dx$

**18.** $\int (8x^3 + 4x)(x^4 + x^2)^{5/2}\,dx$

**19.** $\int (e^{2y} - e^{-2y})\,dy$

**20.** $\int \frac{8x}{3\sqrt[3]{7 - 2x^2}}\,dx$

**21.** $\int \left(\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}\right)dx$

**22.** $\int_0^2 \frac{3e^{3x}}{1 + e^{3x}}\,dx$

**23.** $\int_{-2}^1 10(y^4 - y + 1)\,dy$

**24.** $\int_7^{70} dx$

**25.** $\int_1^2 5x\sqrt{5 - x^2}\,dx$

**26.** $\int_0^1 (2x+1)(x^2+x)^4\,dx$

**27.** $\int_0^1 \left[2x - \frac{1}{(x+1)^{2/3}}\right]dx$

**28.** $\int_3^{27} 3(\sqrt{3x} - 2x + 1)\,dx$

**29.** $\int \frac{\sqrt{t} - 3}{t^2}\,dt$

**30.** $\int \frac{3z^3}{z-1}\,dz$

**31.** $\int_{-1}^0 \frac{x^2 + 4x - 1}{x+2}\,dx$

**32.** $\int \frac{(x^2+4)^2}{x^2}\,dx$

**33.** $\int 9\sqrt{x}\sqrt{x^{3/2} + 1}\,dx$

**34.** $\int \frac{e^{\sqrt{5x}}}{\sqrt{3x}}\,dx$

**35.** $\int_1^e \frac{e^{\ln x}}{x^2}\,dx$

**36.** $\int \frac{6x^2 + 4}{e^{x^3 + 2x}}\,dx$

**37.** $\int \frac{(1 + e^{2x})^3}{e^{-2x}}\,dx$

**38.** $\int \frac{3}{e^{3x}(6 + e^{-3x})^2}\,dx$

**39.** $\int 3\sqrt{10^{3x}}\,dx$

**40.** $\int \frac{5x^3 + 15x^2 + 37x + 3}{x^2 + 3x + 7}\,dx$

*En los problemas 41 y 42, encuentre y, sujeta a las condiciones dadas.*

**41.** $y' = e^{2x} + 3, \quad y(0) = -\frac{1}{2}$

**42.** $y' = \frac{x+5}{x}, \quad y(1) = 3$

*En los problemas del 43 a 50, determine el área de la región limitada por la curva, el eje x y las rectas dadas.*

**43.** $y = x^2 - 1, \quad x = 2$

**44.** $y = 4e^x, \quad x = 0, x = 3$

**45.** $y = \sqrt{x+4}, \quad x = 0$

**46.** $y = x^2 - x - 6, \quad x = -4, \quad x = 3$

**47.** $y = 5x - x^2$

**48.** $y = \sqrt[4]{x}, \quad x = 1, \quad x = 16$

**49.** $y = \frac{1}{x} + 2, \quad x = 1, \quad x = 4$

**50.** $y = x^3 - 1, \quad x = -1$

*En los problemas 51 a 58 encuentre el área de la región limitada por las curvas dadas.*

**51.** $y^2 = 4x, \quad x = 0, \quad y = 2$

**52.** $y = 3x^2 - 5, \quad x = 0, \quad y = 4$

**53.** $y = x^2 + 4x - 5, \quad y = 0$

**54.** $y = 2x^2, \quad y = x^2 + 9$

**55.** $y = x^2 - x, \quad y = 10 - x^2$

**56.** $y = \sqrt{x}, \quad x = 0, \quad y = 3$

**57.** $y = \ln x, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad y = 1$

**58.** $y = 2 - x, \quad y = x - 3, \quad y = 0, \quad y = 2$

**59. Ingreso marginal** Si el ingreso marginal está dado por

$$\frac{dr}{dq} = 100 - \frac{3}{2}\sqrt{2q}$$

determine la ecuación de demanda correspondiente.

**60. Costo marginal** Si el costo marginal está dado por

$$\frac{dc}{dq} = q^2 + 7q + 6$$

y los costos fijos son de 2500, determine el costo total para producir seis unidades. Suponga que los costos están en dólares.

**61. Ingreso marginal** La función de ingreso marginal de un fabricante es

$$\frac{dr}{dq} = 250 - q - 0.2q^2$$

Si $r$ está en dólares, encuentre el incremento en el ingreso total del fabricante si la producción se incrementa de 15 a 25 unidades.

**62. Costo marginal** La función de costo marginal de un fabricante es

$$\frac{dc}{dq} = \frac{1000}{\sqrt{3q + 70}}$$

Si $c$ está en dólares, determine el costo implicado en incrementar la producción de 10 a 33 unidades.

**63. Altas hospitalarias** Para un grupo de personas hospitalizadas, suponga que la razón de altas está dada por

$$f(t) = 0.008e^{-0.008t}$$

donde $f(t)$ es la proporción de altas por día al final de $t$ días de hospitalización. ¿Qué proporción del grupo es dada de alta al término de 100 días?

**64. Gastos de un negocio** Los gastos totales (en dólares) de un negocio para los próximos cinco años están dados por

$$\int_0^5 4000e^{0.05t}\,dt$$

Evalúe los gastos.

**65.** Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 9 - 2x$ y $y = x$ desde $x = 0$ hasta $x = 4$.

**66.** Encuentre el área de la región entre las curvas $y = 2x^2$ y $y = 2 - 5x$ desde $x = -1$ hasta $x = \frac{1}{3}$.

**67. Excedentes de los consumidores y de los productores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = 0.01q^2 - 1.1q + 30$$

y su ecuación de oferta es

$$p = 0.01q^2 + 8$$

Determine los excedentes de los consumidores y de los productores cuando se ha establecido el equilibrio del mercado.

**68. Excedente de los consumidores** Para un producto, la ecuación de demanda es

$$p = (q - 5)^2$$

y la ecuación de oferta es

$$p = q^2 + q + 3$$

donde $p$ (en miles de dólares) es el precio de 100 unidades cuando $q$ cientos de unidades son demandadas u ofrecidas. Determine el excedente de los consumidores bajo equilibrio del mercado.

**69. Biología** En un estudio sobre mutación de genes,[16] se tiene la ecuación

$$\int_{q_0}^{q_n} \frac{dq}{q - \widehat{q}} = -(u + v)\int_0^n dt$$

donde $u$ y $v$ son razones de mutación de genes, las $q$ son frecuencias de genes y $n$ es el número de generaciones. Suponga que todas las letras representan constantes, excepto $q$ y $t$. Integre ambos lados de la ecuación y luego utilice su resultado para demostrar que

$$n = \frac{1}{u + v}\ln\left|\frac{q_0 - \widehat{q}}{q_n - \widehat{q}}\right|$$

**70. Flujo de un fluido** En el estudio del flujo de un fluido dentro de un tubo de radio constante, $R$, tal como el flujo de la sangre en ciertas partes del cuerpo, se puede pensar que el tubo consiste en tubos concéntricos de radio $r$, donde $0 \le r \le R$. La velocidad $v$ del fluido es una función de $r$ y está dada por[17]

$$v = \frac{(P_1 - P_2)(R^2 - r^2)}{4\eta l}$$

donde $P_1$ y $P_2$ son las presiones en los extremos del tubo, $\eta$ (letra griega "eta") es la viscosidad del fluido y $l$ la longitud del tubo. La razón de volumen $Q$ del fluido por el tubo está dado por

$$Q = \int_0^R 2\pi r v\,dr$$

Demuestre que $Q = \dfrac{\pi R^4(P_1 - P_2)}{8\eta l}$. Observe que $R$ aparece como un factor elevado a la cuarta potencia. Así, duplicar el radio del tubo tiene por efecto incrementar el flujo por un factor de 16. La fórmula para la razón de volumen se llama *ley de Poiseuille*, en honor del fisiólogo francés Jean Poiseuille.

**71. Inventario** En un análisis de inventarios, Barbosa y Friedman[18] se refieren a la función

$$g(x) = \frac{1}{k}\int_1^{1/x} ku^r\,du$$

donde $k$ y $r$ son constantes, $k > 0$ y $r > -2$ y $x > 0$. Verifique la afirmación de que

$$g'(x) = -\frac{1}{x^{r+2}}$$

(*Una pista*: Considere dos casos: cuando $r \neq -1$ y cuando $r = -1$.)

*En los problemas 72 a 74, estime el área de la región limitada por las curvas dadas. Redondee sus respuestas a dos decimales.*

**72.** $y = x^3 + 9x^2 + 14x - 24$, $y = 0$

**73.** $y = x^3 - 3x - 2$, $y = 3 + x - 2x^2$

**74.** $y = x^3 + x^2 - 5x - 3$, $y = x^2 + 2x + 3$

**75.** La ecuación de demanda para un producto es

$$p = \frac{200}{\sqrt{q + 20}}$$

y la ecuación de oferta es

$$p = 2\ln(q + 10) + 5$$

Determine los excedentes de los consumidores y de los productores bajo equilibrio del mercado. Redondee sus respuestas al entero más cercano.

[16] W. B. Mather, *Principles of Quantitative Genetics* (Minneapolis: Burgess Publishing Company, 1964).

[17] R. W. Stacy *et al.*, *Essentials of Biological and Medical Physics* (Nueva York: McGraw-Hill Book Company, 1955).

[18] L. C. Barbosa y M. Friedman, "Deterministic Inventory Lot Size Models —a General Root Law", *Management Science*, 24, núm. 8 (1978), 819-826.

# Aplicación práctica

## Cargos de envío

Suponga que usted es el fabricante de un producto cuyas ventas tienen lugar dentro de un radio de $R$ millas a partir de su fábrica. Suponga que cobra a sus clientes a razón de $s$, en dólares por milla, por cada unidad de producto vendido. Si $m$ es el precio unitario (en dólares) en la fábrica, entonces el precio unitario $p$ de entrega a un cliente situado a $x$ millas de la fábrica será el precio de la fábrica más el cargo por envío $sx$:

$$p = m + sx \qquad 0 \leq x \leq R \tag{1}$$

El problema es determinar el precio promedio de entrega de las unidades vendidas.


Suponga que existe una función $f$ tal que $f(t) \geq 0$ en el intervalo $[0, R]$ y que el área bajo la gráfica de $f$ y arriba del eje $t$, desde $t = 0$ y $t = x$, representa el número total de unidades $Q$ vendidas a clientes dentro de un radio de $x$ millas de la fábrica. [Vea la figura 14.55($a$)]. Se puede hacer referencia a $f$ como la distribución de la demanda. Debido a que $Q$ es una función de $x$ y se representa mediante un área,

$$Q(x) = \int_0^x f(t)\,dt$$

En particular, el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(R) = \int_0^R f(t)\,dt$$

[vea la figura 14.55(b)]. Por ejemplo, si $f(t) = 10$ y $R = 100$, entonces el número total de unidades vendidas dentro del área del mercado es

$$Q(100) = \int_0^{100} 10\,dt = 10t\Big|_0^{100} = 1000 - 0 = 1000$$

El cargo por la entrega promedio $A$ está dado por

$$A = \frac{\text{ingreso total}}{\text{número total de unidades vendidas}}$$

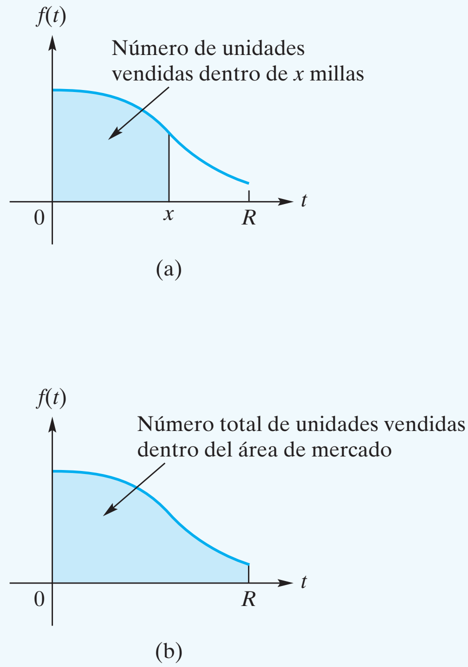



**FIGURA 14.55** Número de unidades vendidas como un área.

Como el denominador es $Q(R)$, $A$ puede determinarse una vez que se conoce el ingreso total.

Para encontrar el ingreso total, considere primero el número de unidades vendidas en un intervalo. Si $t_1 < t_2$ [vea la figura 14.56(a)], entonces el área bajo la gráfica de $f$ y arriba del eje $t$, desde $t = 0$ hasta $t = t_1$, representa el número de unidades vendidas dentro de un radio de $t_1$ millas de la fábrica. De manera similar, el área bajo la gráfica de $f$ y arriba del eje $t$, desde $t = 0$ hasta $t = t_2$, representa el número de unidades vendidas dentro de $t_2$ millas de la fábrica. La diferencia entre esas áreas, desde el punto de vista geométrico, es el área de la región sombreada en la figura 14.56(a), y representa el número de unidades vendidas entre $t_1$ y $t_2$ millas de la fábrica, lo cual es $Q(t_2) - Q(t_1)$. Así,

$$Q(t_2) - Q(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)\,dt$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, entonces el número de unidades vendidas a clientes situados entre 4 y 6 millas de la fábrica es

$$Q(6) - Q(4) = \int_4^6 10\,dt = 10t\Big|_4^6 = 60 - 40 = 20$$

El área de la región sombreada en la figura 14.56(a) puede aproximarse por el área de un rectángulo [vea la figura 14.56(b)], cuya altura es $f(t)$ y cuyo ancho es $\Delta t$, donde $\Delta t = t_2 - t_1$. Así, el número de unidades vendidas en el intervalo de longitud $\Delta t$ es casi igual a $f(t)\,\Delta t$. Como el precio aproximado

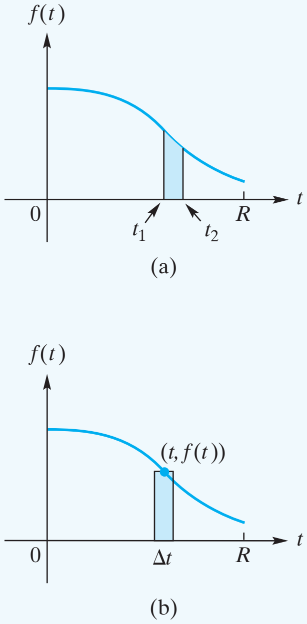



**FIGURA 14.56** Número de unidades vendidas en un intervalo.

de cada una de esas unidades es [de la ecuación (1)] $m + st$, el ingreso recibido es aproximadamente

$$(m + st)f(t)\Delta t$$

La suma de todos estos productos desde $t = 0$ hasta $t = R$, aproxima el ingreso total. La integración definida da

$$\sum (m + st)f(t)\,\Delta t \rightarrow \int_0^R (m + st)f(t)\,dt$$

Así,

$$\text{ingreso total} = \int_0^R (m + st)f(t)\,dt$$

En consecuencia, el precio promedio de envío $A$ está dado por

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{Q(R)}$$

En forma equivalente

$$A = \frac{\int_0^R (m + st)f(t)\,dt}{\int_0^R f(t)\,dt}$$

Por ejemplo, si $f(t) = 10$, $m = 200$, $s = 0.25$ y $R = 100$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^R (m + st)f(t)\,dt &= \int_0^{100} (200 + 0.25t)\cdot 10\,dt \\ &= 10\int_0^{100} (200 + 0.25t)\,dt \\ &= 10\left(200t + \frac{t^2}{8}\right)\Bigg|_0^{100} \\ &= 10\left[\left(20\,000 + \frac{10\,000}{8}\right) - 0\right] \\ &= 212\,500\end{aligned}$$

Como ya se calculó antes,

$$\int_0^R f(t)\,dt = \int_0^{100} 10\,dt = 1000$$

Así, el precio promedio de envío es de $212\,500/1000 =$ \$212.50.

## Problemas

1. Si $f(t) = 50 - 2t$, determine el número de unidades vendidas a clientes localizados (a) dentro de un radio de 5 millas de la fábrica, y (b) entre 20 y 25 millas.
2. Si $f(t) = 40 - 0.5t$, $m = 50$, $s = 0.20$ y $R = 80$, determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el cargo promedio por envío.
3. Si $f(t) = 900 - t^2$, $m = 100$, $s = 1$ y $R = 30$, determine (a) el ingreso total, (b) el número total de unidades vendidas y (c) el cargo promedio por envío. Si desea, utilice una calculadora graficadora.
4. En el mundo real, ¿cómo hacen los vendedores de artículos como libros o ropa, para determinar los cobros por envío de un pedido? (Visite a un comerciante en línea para averiguarlo.) ¿Cómo podría usted calcular el costo promedio de envío de sus productos? ¿El procedimiento es fundamentalmente diferente al que se vio en esta aplicación práctica?